TEMA 1
POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

1I.- <u>Potenciación</u>: Es la operación que consiste en repetir un número llamado base tantas veces como indica otro número llamado exponente, al resultado de esta operación se le llama potencia.

a = base
n = exponente
p= potencia

$$a^n = p$$

2.- Leyes de Exponentes

$a^n.a^m=a^{n+m}$	$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$
$(a.b)^n=a^n.b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$
$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
$(a^n)^m=a^{nm}$	$\left[\left(\left(a^m\right)^n\right)^\alpha\right]^\beta=a^{mn\alpha\beta}$

3.- <u>Radicación</u>: La raíz n-ésima de una expresión a, llamada radicando; es otra expresión talque esta raíz elevada a n, nos da el radicando a, es decir:

$$\sqrt[n]{a}=b \leftrightarrow a=b^n$$

También se tiene que:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[\beta]{\sqrt[\alpha]{\sqrt[n]{a}}}=\sqrt[n\alpha\beta]{a}$$

EJERCICIOS

1. Hallar el valor numérico de:

$$A=3^{2^{1^5}}+2^{1^{3^5}}+1^{2^{5^3}}$$

2. Calcular:

S = $$S=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}}}}}$$

3. Simplificar:

$$P=\frac{7^x\cdot(1+98+7^{1-x})}{7^{x^{2^0}}+2\cdot7^{2+x}+7}$$

4. Al reducir:

$$E=\frac{3^{x+2}+2.3^{x+1}}{2.3^{x+1}-3^x}$$

5. Reducir:

$$E=\sqrt[n+3]{\frac{a^{n^2+5n}.\sqrt[n]{a^{n^2}}}{\sqrt[n]{a^{3n^2}}}}$$

6. Simplificar:

$$D=\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a}}}\,.\sqrt[3]{a.\sqrt[4]{a.\sqrt[5]{a}}}}{\sqrt[-20]{a^{11}}}$$

7. Hallar el menor valor que cumple con la siguiente igualdad:

$$5^{x^2+1}=3125$$

8. Hallar "x" si:

$$3^{3^{3^{x-2}}}=27$$

Dar como respuesta el valor de:

$$E=\frac{x^x+2x+1}{x+1}$$

9. Hallar "*n*" en:

$$a^{5^{n^3}}=\left(a^{5^6}\right)^{25}$$

10. Calcular "*x*" si:

$$3^{x^2+1}+3^{x^2+3}=90$$

11. Calcular:

$$R=\sqrt[n]{\frac{5^{8n+3}.6}{125^{2n+1}+25^{3n+2}}}$$

12. Si $x^{x^3}=3$, hallar x^6

13. Hallar "*x*" si:

$$x^{x^{x+1}}=256$$

14. Calcular "*n*" si:

$$\left[\ldots\left[a^{\left(1-\frac{1}{3}\right)}\right]^{\left(1-\frac{2}{3}\right)}\ldots\ldots\right]^{\left(1-\frac{5}{3}\right)}.\underbrace{a\ldots\ldots\ldots a}_{n\ veces}.\frac{a^n}{a^{20}};$$

es igual a 1, donde $a\neq 1$

15. Calcular:

$$M=\frac{2^{n+8}+2^{n+7}}{2^{n+7}+2^{n+6}}+\sqrt[n-1]{\frac{7^{n-1}+3^{n-1}}{7^{1-n}+3^{1-n}}}$$

16. Sabiendo que: $x^{2n}=\sqrt[5]{3}$

calcular:

$$A=\frac{\overbrace{x^2.x^2.x^2\ldots\ldots\ldots x^2}^{"n"\ veces}\left[(x^n)^2\right]^3}{\underbrace{x^{-1}.x^{-1}.x^{-1}\ldots\ldots\ldots x^{-1}}_{2n\ veces}}$$

17. Sabiendo que el exponente final de:

$$\underbrace{\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\ldots\ldots\ldots\sqrt[3]{x^2}}}}}_{"n"\ radicales}$$

es $\frac{80}{3^n}$ y $x=\frac{n}{2}$, hallar: (*n* + *x*)

18. Hallar las tres últimas cifras del exponente final de efectuar:

$$\underbrace{A^7.(A^7)^{11}.(A^7)^{111}.(A^7)^{1111}\ldots\ldots\ldots(A^7)^{1111\ldots1}}_{40\ \text{factores}}$$

PROBLEMAS

1. Resolver:

$$E=\frac{15^6.12^4.5^4.6^3.25^3}{10^{11}.3^{13}.5^4}$$

A) 2 B) 5 C) 3 D) 1 E) N.A.

2. Simplificar:

$$E=\frac{5^{2-x}}{5^{-x-2}}$$

A) 5 B) 25 C) 125 D) 625 E) 225

3. Si: $2^{3^{8^x}}=512$, hallar "x"

A) 2 B) –2 C) 3 D) 1/3 E) N.A.

4. Resolver:

$$E = \left[(1/2)^{-2} + 2(1/3)^{-2} + (1/3)^{-3}\right]^{0,5}$$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 99

5. Resolver: $2^x - 2^{x-2} = 3$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) N.A.

6. Reducir: $E = \left[16^{-4^{-2^{-1}}}\right]^{-2^{-1}}$

A) 1/2 B) 2 C) 4 D) 1/4 E) 1/8

7. En $3^{2^{x+2}} = 81^{4^{x-1}}$, hallar "x"

A) 0 B) 1 C) 2 D) –1 E) –2

8. Hallar"x": $2^{8^x} = 4^{4^{x+1}}$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) N.A.

9. Hallar "x": $\sqrt[4]{5^{13x-2}} = \sqrt[3]{5^{7x+4}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) N.A.

10. Si: $27^{x-10} = \dfrac{1}{3^{2x}}$, hallar "x"

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) N.A.

11. Reducir:

$$E = \frac{3^{x+5} - 3(3^{x+2})}{3.3^{x+4}}$$

A) 2/3 B) 4/9 C) 8/9 D) 8/3 E) 1/3

12. Simplificar:

$$E = \left[\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^9}}\right]^4 . \left[\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}}\right]^4$$

A) a^2 B) a^4 C) a^8 D) a^{16} E) N.A.

13. Si $x^{x^2} = 2$, hallar "x"

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{2}$ D) 2^{-1} E) N.A.

14. Reducir:

$$E = \sqrt[n]{\frac{64^n + 16^{2n}}{8^n + 32^n}}$$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 64

15. Reducir:

$$E = \sqrt[n]{\frac{5.4^{n+1}}{4^{n+2} + 2^{2n+2}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. Resolver:

$$E = \frac{ab^{-1} - a^{-1}b}{a^{-1} + b^{-1}}$$

A) a+b B) a–b C) ab D) a/b E) b/a

17. Hallar "x"

$$2.5^{x-2} + 2^x = 12.5^{x-3} + 3.2^{x-3}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) N.A.

18. Calcular "P":

$$P = \frac{2^{a+1} + 2^{a} + 2^{a-1}}{2^{a-1} + 4^{1+\frac{a}{2}}}$$

A) 7/9 B) 7/6 C) 5/7 D) 9/7 E) 8/7

19. Reducir la expresión:

$$P = \frac{\overbrace{6+6+6+\ldots\ldots+6}^{3^{x}\text{ sumandos}}}{3^{x+2} - 3^{x+1}}$$

A) 1 B) 3^{x} C) $2{,}3^{x}$ D) 3^{x+1} E) N.A.

20. Reducir: $S = \left[\sqrt[16]{16}\right]^{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

21. Hallar “n” en:

$$\sqrt[8]{\frac{7^{15} - 7^{n}}{7^{n-4} - 7^{3}}} = 7$$

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

22. Hallar”x”:

$$\sqrt[7]{2}\ \sqrt[7]{2^{3}}\ \sqrt[7]{2^{5}} \ldots \sqrt[7]{2^{2x-1}} = 128\,.$$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

23. Hallar “x”

$$3^{x} + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$$

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 11

24. Si: $x^{x^{x}} = \sqrt{2}$,

hallar el valor de: $x^{\sqrt{2}\cdot(x^{x+x^{x}})}$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) N.A.

25. Hallar “x” en:

$$y^{x} = 64,\quad y^{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = 16\,.$$

A) 2 B) –1 C) 5 D) 3 E) 4

26. Si: $x^{729} = \sqrt[n^{n}]{x^{n^{2}}}$, hallar “n”

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

27. Calcular el valor de la expresión:

$$E = \frac{2^{m+3}.7^{2m+1} - 2^{m+1}.7^{2m}}{2^{m+5}.7^{2m} - 2^{m+1}.7^{2m+1}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 2^{m} E) 7^{m}

28. Simplificar:

$$A = \frac{\sqrt[\sqrt{2}]{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{2}}}{\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt[2]{2}}}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 1/2 E) N.A.

29. Si: $x^{m} \,.\, y^{n} = 10^{m}$

$x^{n} \,.\, y^{m} = 10^{n}$

hallar “E”

$$E = (x.y)^{\frac{x}{y}}$$

A) 10 B) $\sqrt{10}$ C) $\sqrt[10]{10}$ D) 10^{10} E) 1

30. Reducir:

$$E = \left[\sqrt[n^{n^n}]{n^{n^{2n^n}}}\right]^{n^{n^n - \left[n^{n^n}\right]^2}}$$

A) n^n B) 1 C) n D) $\sqrt[n]{n}$ E) n^{n^2}

31. El exponente de reducir la siguiente expresión es:

$$E = \sqrt[1-\frac{1}{x}]{\left[\left[x^{x^{-2}}\right]^{x^2-1}\right]^{\frac{x}{x+1}}}$$

A) 1 B) x^4 C) x^x D) $\sqrt[x]{x}$ E) N.A.

32. Operar:

$$E = \frac{\sqrt[a-b]{x^{(a-c)^{-1}}} \cdot \sqrt[b-a]{x^{(b-c)^{-1}}}}{\sqrt[c-a]{x^{(b-c)^{-1}}}}$$

A) x C) x^{a+b+c} E) x^{abc}

B) 1 D) $x^{ab+ac+bc}$

33. Hallar"n":

$$\frac{\left|\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{-3}\sqrt[\frac{1}{4}]{b^3}}\right|^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{\sqrt[\frac{1}{2}]{a^6\sqrt{b^{-3}}}}} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

A) 3   B) 4   C) 5   D) 6   E) N.A.

34. Si: $\sqrt[x]{x+y} = 4$;

$8^x(x+y) = 1024$;

hallar: $x \cdot y$

A) 24   B) 28   C) 32   D) 256   E) 64

35. Si: $x^{-\sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$;

y dar como respuesta el valor de $(4x)^{x^{-1}}$

A) 1   B) 2   C) 4   D) 8   E) N.A

36. Simplificar:

$$E = \sqrt[n]{\frac{10^n + 15^n + 6^n}{5^{-n} + 2^{-n} + 3^{-n}}}$$

A) 10   B) 20   C) 30   D) 40   E) 50

37. Simplificar:

$$E = \frac{1}{x^{x-y} - 1} + \frac{1}{x^{y-x} - 1}$$

A) x B) y^x C) x^y D) x^x E) N.A.

38. Resolver:

$$E = \left[x^{-x^{-x^{-x}}}\right]^{x^{x^{-x^{-x}}}}$$

A) x B) $\frac{1}{x}$ C) 1 D) x^x E) N.A.

39. Simplificar:

$$M = \frac{\sqrt[7]{x^4 \div \sqrt[7]{x^4 \div \sqrt[7]{x^4 \div \ldots\ldots \infty \text{ radic}}}}}{\sqrt[4]{x \,.\, \sqrt[4]{x \,.\, \sqrt[4]{x \ldots\ldots \infty \text{ radic}}}}}$$

A) x B) x^6 C) $\sqrt[6]{x}$ D) $\sqrt{x}$ E) $\sqrt[3]{x}$

40. Proporcionar la raíz cúbica de "x" si:

$$\sqrt[x]{x^{x^2} \,.\, \sqrt[x]{x^{x^3} \,.\, \sqrt[x]{x^{x^4} \ldots\ldots \text{"x" radicales}}}} = 4^{96}$$

A) 3 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt[3]{3}$ E) N.A.

1-B	2-D	3-D	4-D	5-C	6-B	7-C	8-E	9-B	10-C
11-C	12-B	13-B	14-C	15-A	16-B	17-B	18-A	19-A	20-C
21-D	22-C	23-C	24-A	25-D	26-C	27-C	28-A	29-D	30-C
31-E	32-B	33-C	34-B	35-B	36-C	37-E	38-B	39-C	40-B

TEMA 2

ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una ecuación es una relación de igualdad que se establece entre dos expresiones matemáticas de por lo menos una variable.

Las ecuaciones pueden ser:

Ecuaciones Algebraicas

- $x^3 + 3x^2 - 7 = 0$ — ecuación polinomial
- $\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x-2} = 0$ — ecuación fraccionaria
- $\sqrt{x-3} - z = 0$ — ecuación irracional

Ecuaciones Trascendentes

- $2^{2x - 4x + 1} = 0$ — ecuación exponencial
- $\log x - x^3 = 0$ — ecuación logarítmica
- $\operatorname{sen} x - 8 = 0$ — ecuación trigonométrica

Clasificación de las ecuaciones según su solución

A) Ecuación compatible.- Es aquella que tiene al menos un elemento en su conjunto solución.

B) Ecuación compatible determinada.- Es aquella que tiene un número limitado de elementos en su conjunto solución.

Ejemplo: $x - 3 = 0$

c.s. = $\{ 3 \}$

C) Ecuación compatible indeterminada.- Es aquella que tiene un número ilimitado de elementos en su conjunto solución, es decir su solución son todos los números reales.

Ejemplo:

$$(x - 3) = x - 3$$
$$x = x$$
$$0x = 0$$
$$\text{c.s.} = R$$

D) Ecuación incompatible.- Es aquella que no tiene ningún elemento en su conjunto solución, es decir su solución es el vacío.

Ejemplo:

$$x - 4 = x + 5$$
$$0x = 9$$
$$\text{c.s.} = \phi$$

PROBLEMAS

1. Hallar "x" en: $3x - 4(x + 3) = 8x + 6$

   A) –2 B) –1 C) –3 D) 2 E) 1

2. Hallar "x": $5x + 6x - 81 = 7x + 102 + 65x$

   A) 1 B) 2 C) 3 D) –2 E) –3

3. Resolver: $(x + 3)/2 - (x - 1)/4 = (x + 6)/3$

   A) 1 B) –2 C) 2 D) 3 E) –3

4. Hallar "x": $10 - \dfrac{3x+5}{6} = 3\dfrac{11}{12} - \dfrac{x/2}{4}$

   A) 14 B) 7 C) 11/4 D) 4/25 E) 11/7

5. Hallar "x" en: $2 - \dfrac{x-1}{40} = \dfrac{2x-1}{4} - \dfrac{4x-5}{8}$

   A) 65 B) 64 C) 66 D) 63 E) N.A.

6. Resuelve: $\frac{x-3}{5}-\frac{7x-1}{10}+\frac{3}{4}=\frac{8}{3}-\frac{x}{2}$

A) {–1} B) {1} C) {3} D) ϕ E) N.A.

7. Resolver: $\frac{2x+1}{4-3x}+\frac{6x+1}{9x-3}=0$

A) –1 B) 24 C) –1/24 D) –24 E) N.A.

8. Resolver: $\frac{x+1}{2x+1}+\frac{2x+3}{x+1}=\frac{5}{2}$

A) –3/5 B) 3/5 C) –1 D) 5/3 E) N.A.

9. Hallar "x": $\frac{x+6}{x+2}-\frac{x+1}{x-3}=\frac{x-5}{x-1}-\frac{x}{x+4}$

A) 1/2 B) –1/2 C) 1/3 D) –1/3 E) 3/5

10. Resolver: $\frac{2x+7}{5x+2}=\frac{2x-1}{5x-4}$

A) 13/14
B) 14/13
C) –13/14
D) –14/13
E) N.A.

11. Resolver: $\frac{1}{2x(x-1)}-\frac{1}{(x+1)(2x+3)}=0$

A) 3/7 B) 7/3 C) 3/4 D) –3/7 E) 7/4

12. Resolver: $3x-(2x-1) = 7x-(3-5x)+(-x+24)$

A) 2 B) –1/2 C) 1/2 D) 4/3 E) –2

13. Resolver: $x-\frac{x+2}{12}=\frac{5x}{2}$

A) x = –2/19
B) x = 1/19
C) x = –1/19
D) x = 2/19
E) x = –2/9

14. Resolver y dar como respuesta el conjunto solución: $\frac{x+2}{x+4}=\frac{x+3}{x+5}$

A) {10} B) {12} C) ϕ D) {5} E) N.A.

15. Resolver: $3x-\frac{2x}{5}=\frac{x}{10}-\frac{7}{4}$

A) 7/10 B) 7/5 C) 7/15 D) 7 E) N.A.

16. Si la ecuación de primer grado: $(x-a)(2x+1)+bx^2+8x+5+a = 0$ no tiene solución real. Hallar a + b.

A) 5/2 B) 5 C) 5/4 D) –5/2 E) N.A.

17. Dar como respuesta el conjunto solución de: $\frac{2y}{y-5}=-2+\frac{10}{y-5}$

A) {3} B) {4} C) {5} D) {6} E) ϕ

18. Resolver: $\frac{10}{x^2-9}+\frac{3x}{x+3}-\frac{7}{x-3}=3$

A) 3 B) –3 C) 1 D) –1 E) 2

19. Resolver: $\frac{3}{x+2}-\frac{5x}{x^2-4}=\frac{3}{x-2}-\frac{x}{x^2-4}$

A) –2 B) 2 C) 3 D) –3 E) 1

20. La ecuación: $\frac{x+1}{x-3}+\frac{x+5}{x-2}=\frac{2x^2-x-11}{x^2-5x+6}$

A) Admite como solución: x = 3
B) Admite como solución: x = 1
C) Admite como solución: x = 2
D) Admite múltiples soluciones
E) No admite solución

21. Resolver: $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right\}-1\right\}-1=0$

A) 34 B) 32 C) 30 D) 24 E) 12

22. Resolver la ecuación en "x": $\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1$

A) a + b
B) ab
C) a – b
D) a^2+ab+1
E) 1

23. Resolver la siguiente ecuación en "x":

$$\frac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)}-\frac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)}=\frac{5}{84}$$

A) 9 B) –16 C) –25 D) 21 E) N.A.

24. Si la ecuación: $\frac{2mx-3}{x-1}+\frac{3mx-2}{x+1}=2m+3$, se reduce a una ecuación de primer grado en "x", ¿qué valor asume el parámetro "m"?

A) –1 B) 2 C) 1 D) –2 E) 4

25. Con respecto al problema anterior, ¿cuál es la solución de la ecuación?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

26. Resolver: $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-4}{x-3}-\frac{x-2}{x-1}$

A) 1 B) 3/2 C) 5/2 D) 1/2 E) 5

27. Resolviendo: $(a+1)(x-a[(1-a)x+a]-1) = (a^2-1)(a-1)$ se obtiene para "x" el valor:

A) 1 B) 2 C) a D) 2a E) a + 1

28. ¿Qué valor debe tener "x" para que se cumpla:

$$\frac{x-\frac{x}{m}}{1+\frac{1}{m}}-\frac{m+1}{\frac{1}{x}(m-1)}=\frac{4m}{1-m}$$

A) m + 1
B) m – 1
C) – (m + 1)
D) 1 – m
E) 1

29. Al resolver:

$$\frac{(5+a)x}{5-a}+\frac{1}{5+a}=\frac{2}{a^2-25}-\frac{1}{a-5}+\frac{(5-a)x}{5+a}$$

Se obtiene:

A) x = a
B) $x=\frac{a+1}{a}$
C) $x=\frac{a-1}{10a}$
D) $x=\frac{a-1}{20}$
E) $x=\frac{a-1}{2a}$

30. Resolver en "x":

$$\frac{a+1}{(a+b)^2}x+\frac{a+1}{(a-b)^2}=\frac{a+1}{a^2-b^2}+\frac{a+1}{(a-b)^2}x$$

A) $\frac{a+b}{a}$
B) $\frac{a+b}{2a}$
C) $\frac{a+b}{a+1}$
D) $\frac{a-b}{a+1}$
E) $\frac{a^2-b^2}{2a}$

31. Resolver en "x": $\frac{x+m}{m-n}+\frac{x-m}{m+n}=\frac{x+n}{m+n}+\frac{2(x-n)}{m-n}$

A) 2m B) 3m C) 3n D) 2n E) m+n

32. Resolver en "x": $\frac{x-1}{x+a-b}=\frac{1-x}{x-a+b}+2$

A) a – b
B) $(a-b)^2$
C) a + b
D) $(a+b)^2$
E) ab

33. Resolver la ecuación en "x": $\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$; $abc\neq 0$.

Indique por respuesta el equivalente de: $\frac{x-c}{a+b}+\frac{x-b}{a+c}+\frac{x-a}{b+c}$

A) 3 B) –3 C) 6 D) –6 E) 1

34. Para qué valor de "x" se verifica la siguiente igualdad:

$$\frac{\sqrt{x}+b}{\sqrt{x}-b}+\frac{\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}+a}=\frac{\sqrt{x}-b}{\sqrt{x}+b}+\frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-a};\ x\neq 0$$

A) a+b B) a–b C) ab D) –ab E) 1

35. Resolver: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

36. Hallar "x": $\frac{4x+5}{15x^2+7x-2}-\frac{2x+3}{12x^2-7x-10}-\frac{2x-5}{20x^2-29x+5}=0$

A) 3 B) 6 C) –3 D) –6 E) 0

37. Hallar "x" en: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=2\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$

A) 14/11
B) 14/13
C) –14/13
D) 15/13
E) N.A.

38. Resolver la siguiente ecuación en "x": $\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}=\sqrt[6]{x-1}$

A) 1 B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) N.A.

39. Hallar "a" en función de "x": $\dfrac{\sqrt{5x+a}+\sqrt{6x}}{\sqrt{5x+a}-\sqrt{6x}} = 4$

A) 3x/40 C) 35x/3 E) 4x/3
B) –3x/40 D) 3x/4

40. Hallar (m + n + 2): $(m+n+1)^3 - 6(m+n)(m+3+n) = (n-1+m)^3$

A) 1/9 C) $-2\dfrac{1}{9}$ E) 43/13

B) $2\dfrac{1}{9}$ D) 3

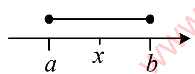
1-A	2-E	3-E	4-A	5-C	6-D	7-C	8-A	9-B	10-A
11-D	12-E	13-A	14-C	15-E	16-A	17-E	18-C	19-D	20-E
21-C	22-A	23-C	24-C	25-B	26-C	27-B	28-A	29-C	30-C
31-C	32-B	33-A	34-D	35-C	36-D	37-B	38-B	39-C	40-B

2. INECUACIONES DE PRIMER GRADO

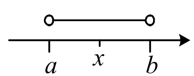
2.1.Intervalos

Sean dos números reales a y b tales que $a<b$, se denomina intervalo de extremos a y b a los siguientes subconjuntos en **R**

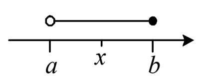
A) Intervalo cerrado: $[a,b] = \{x \in R \,/\, a \le x \le b\}$



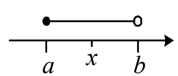
B) Intervalo abierto: $]a,b[= \{x \in R \,/\, a < x < b\}$



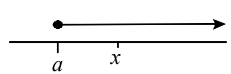
C) Intervalo semiabierto: $]a,b] = \{x \in R \,/\, a < x \le b\}$

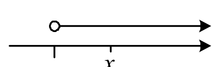


$[a,b[= \{x \in R \,/\, a \le x < b\}$



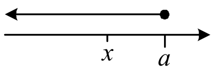
D) Intervalos infinitos: $[a,+\infty[= \{x \in R \,/\, x \ge a\}$



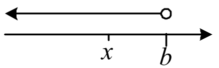


$]a,+\infty[= \{x \in R \,/\, x > a\}$

$]-\infty,b] = \{x \in R \,/\, x \le a\}$



$]-\infty,b[= \{x \in R \,/\, x < b\}$



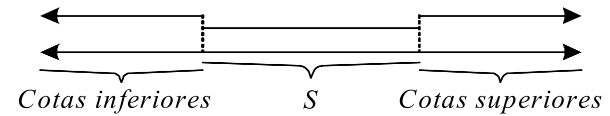
2.2.Conjuntos acotados

A) Cota superior

Un número real k es una cota superior de un subconjunto no vacío S de **R** sí y sólo sí: $x \le k$; $\forall x \in S$

B) Cota inferior

Un número real k es una cota inferior de S si y sólo si $x \ge k$; $\forall x \in S$



C) Supremo

Un número real c se llama supremo de un subconjunto no vacío S de ***R***, y se escribe c = sup S si:

- c es cota superior de S ($x \le c$, $\forall x \in S$)
- c es la menor cota superior de S, es decir:

$\forall k \in R \,/\, x \le k$, $\forall x \in S$, entonces $k \ge c$

Por lo tanto, c no necesariamente pertenece a S

D) Ínfimo

Un número real d se llama ínfimo de un subconjunto no vacío S de **R**, y se escribe c = inf S si:

- d es cota inferior de S ($x \ge d$, $\forall x \in S$)
- d es la mayor de las cotas inferiores de S, es decir:

$\forall k \in R \,/\, x \ge k$, $\forall x \in S$, entonces $k \le d$

Por lo tanto, d no necesariamente pertenece a S

E) Máximo

Si c es supremo de S y $c \in S$, entonces c es máximo de S (c = máx S)

F) Mínimo

Si d es ínfimo de S y $d \in S$, entonces d es mínimo de S (d = min S)

Ejemplo: dado el conjunto $S =]2, 5]$
el sup $S = 5$, además $5 \in S$, entonces el máx $S = 5$.
el ínf $S = 2$, pero $2 \notin S$, entonces S no tiene mínimo.

Problemas

1. Sean los conjuntos (intervalos) $A = \{x \in \Re \ / \ x \leq 5\}$ y $B = \{x \in \Re \ / \ -8 \leq x < 12\}$
Hallar:
I. $A \cup B$
II. $(A \cup B)'$
III. $A \cap B$
IV. $(A \cap B)'$
V. $A - B$

2. Para reales afirmamos:
a. Si $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$
b. Si $a < b \Rightarrow ac > bc$
c. Si $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$
Son verdaderas:
A) Todas B) Sólo I C) Solo I y III D) Sólo I y II E) N.A.

3. Resolver: $2x + 4 \leq x + 12$
A) $]-\infty, -8]$ B) $]-\infty, 8]$ C) $]-\infty, 26]$ D) $]-\infty, -16]$ E) N.A.

4. Resolver: $3x + 4 \leq 2x + 10 < 5x + 8$
A) $[2/3, 6]$ B) $\Re$ C) $]2/3, 6]$ D) ϕ E) $]2/3, 6[$

5. Si x es entero, ¿qué valor no puede tomar x en: $\frac{x+1}{3} > \frac{x-1}{5}$?
A) 1 B) –3 C) 0 D) –6 E) 11

6. Resolver: $\frac{x+1}{x} > 3$
A) $x < 1/2$ B) $0 < x < 1/2$ C) $x > 0$ D) $x < 0$ E) N.A.

7. Si: $x \in]2, 8[\ \wedge \ (x + 4) \in]m, n[$, hallar "m.n":
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) N.A.

8. Si a la edad de Carlos se le duplica resulta menor que 84. Si a la mitad de dicha edad se le resta 7 resulta mayor que 12. Hallar la suma de las cifras de la edad de Carlos, si dicha suma es mayor que 5.
A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

9. El número de plumas contenidas en una caja es tal que su duplo, disminuido en 86, es mayor que 200. De la caja se sacan 17 y quedan menos que la diferencia entre 200 y la mitad de las que había inicialmente. ¿Cuántas eran éstas?
A) 156 B) 188 C) 144 D) 123 E) 132

10. Un auto viaja de A a B. Si luego de haber recorrido la tercera parte más 20 Km, lo que le falta no es mayor a 224 Km. Hallar la distancia de A a B; si la quinta parte de esta distancia es mayor que 73. Se sabe además que dicha distancia medida en Km es un número entero.
A) 364 B) 365 C) 366 D) 363 E) N.A.

11. Un número entero y positivo, es tal que la tercera parte del que le precede, disminuida en 10, es mayor que 14, y que la cuarta parte del que le sigue, aumentada en 10, es menor que 29. ¿Con qué cifra comienza el número?
A) 5 B) 7 C) 9 D) 8 E) 4

12. Se tiene un cierto número de monedas. Si se hacen montones de a 7, no se pueden completar 8 de aquellos, y si se hacen de a 6, se completan y queda un sobrante. ¿Cuál es el número de monedas?
A) 55 B) 54 C) 53 D) 45 E) N.A.

13. Resolver: $2x + 3(x - 2) > 9$
A) $x < 3$ B) $x > 3$ C) $x \leq 3$ D) $x \geq 3$ E) N.A.

14. Resolver: $A = [5, 8]$, B: $2x + 3 < x + 10$, hallar $B - A^C$
A) $\langle -7, 8\rangle$ B) $\langle 7, 8\rangle$ C) $[7, 8]$ D) $\langle 7, 8]$ E) N.A.

15. Resolver: $3x + 4 > 2x + 1$
$8x - 5 < 2x + 31$
A) $\langle -3, 6\rangle$ B) $\langle 3, 6\rangle$ C) $[3, 6]$ D) $\langle 3, 6]$ E) N.A.

16. Resolver: $\frac{3(x+4)+x}{4} > 2(x + 1)$
A) $x < 2$ B) $x > 2$ C) $x \leq 2$ D) $x \geq 2$ E) N.A.

17. Hallar el menor valor entero de "y" si:

$x = 4y + 2x$
$x - 3 < y - 4$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18. Si: $\frac{4x+1}{5} \geq \frac{3x-2}{3}$ el mayor valor entero de x que cumple es:

A) 4 B) 3 C) 5 D) –2 E) 7

19. Si: $A = [5, 9]$; $B = [8, 17\rangle$; hallar $A \cup B$

A) $\langle 5, 17\rangle$ C) $[5, 17\rangle$ E) $\langle 5, 17]$
B) $\Re$ D) $[5, 17]$

20. Si: $A = \langle -\infty, 2\rangle$; $B = [-2, 7\rangle$, hallar $A - B$

A) $\langle -2, +\infty\rangle$ C) $\langle -\infty, -2]$ E) $\langle -2, +\infty\rangle$
B) $\langle -\infty, -2\rangle$ D) $\Re$

21. Si: $A = \langle -\infty, 1\rangle$, $B = \langle -4, 8]$ y $C = \langle 5, 16]$; hallar: $(A \cup B)' - C$

A) $\langle 16, +\infty\rangle$ C) $\langle -\infty, 5]$ E) $\langle -2, +\infty\rangle$
B) $[16, +\infty\rangle$ D) $\langle -\infty, 5\rangle$

22. Si: $A = \langle 3, 5]$ y $B = \langle -\infty, 2] \cup \langle 4, 10]$; Hallar $A - B'$

A) $\langle -4, 5\rangle$ C) $[4, 5]$ E) N.A.
B) $\langle 4, 5\rangle$ D) $\langle 4, 5]$

23. Resolver: $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 2x + \frac{1}{3}$

A) $\langle -\infty, -7/8\rangle$ C) $\langle -\infty, -7/18\rangle$ E) N.A.
B) $\Re$ D) ϕ

24. Resolver: $\frac{x+1}{3} > \frac{x-1}{4}$

$\frac{x-1}{4} < \frac{x+1}{3}$

A) $\langle -7, 7\rangle$ C) $[-7, 7]$ E) N.A.
B) $\Re$ D) ϕ

25. Para reales afirmamos:

a. Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
b. Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0$
c. $(a + b)^2 \geq 2ab$

Son verdaderas:

A) Sólo I C) Solo III E) N.A.
B) Sólo II D) Todas

26. Si: $x = 1981\,(1 + 2 + 3 + ... + 1982)$
$y = 1982\,(1 + 2 + 3 + ... + 1981)$
se cumple:

A) $x < y - 1$ C) $x < y - 3$ E) $x = y - 1/2$
B) $x < y - 2$ D) $x > y$

27. Si $x \in]2, 8[\wedge (x + 4) \in]m, n[$, hallar m.n:

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) N.A.

28. Resolver: $2x + 4 \leq 3x + 6 \leq 5x - 10$

A) $[-2, \infty[$ C) $[8, \infty[$ E) $[2, \infty[$
B) $[-8, \infty[$ D) ϕ

29. Resolver: $3x + 4 \leq 2x + 8 \leq 2x + 6$

A) $\Re$ C) $]4, \infty[$ E) N.A.
B) $]-\infty, 4[$ D) ϕ

30. Resolver: $2 \leq 5 - 3x < 11$

A) $\langle -\infty, 2\rangle$ C) $]-2, 1]$ E) $[1, +\infty\rangle$
B) $[-2, 1]$ D) $\langle -2, +\infty\rangle$

31. Resolver: $5x - 2 < 10x + 8 < 2x - 8$

A) $]-2, +\infty\rangle$ C) ϕ E) $\langle -2, +\infty\rangle$
B) $\langle -\infty, -2\rangle$ D) $\Re$

32. Resolver: $-\frac{1}{5} \leq 3x - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}$

A) $]1/6, 7/12[$ C) $]1/60, 7/36[$ E) N.A.
B) $\langle 1/6, 7/12\rangle$ D) $[1/60, 7/36]$

33. Resolver: $2x + 10 \leq 2x + 12 \leq x + 11$

A) $\Re$ C) $]-\infty, -1[$ E) $]-\infty, -1]$
B) $]-\infty, 1[$ D) $]-\infty, 1]$

34. Resolver: $\frac{2x+5}{3} < \frac{x-1}{2} \leq 4x + \frac{1}{5}$

A) $\langle -13, -1/5]$ C) ϕ E) N.A.
B) $\Re$ D) $\langle -\infty, -13\rangle$

35. Resolver: $\frac{4x}{3} - 1 \le \frac{3x}{5} + 2$

A) $\Re$ C) $\langle -\infty, 45/11\rangle$ E) N.A.
B) ϕ D) $\langle 45/11, +\infty\rangle$

36. Resolver: $7x - \frac{1}{4} < x + \frac{7}{4}$

A) $\langle 1/3, +\infty\rangle$ C) $[1/3, +\infty\rangle$ E) N.A.
B) $\langle -\infty, 1/3\rangle$ D) $\langle -\infty, -1/3\rangle$

37. La suma de los valores enteros de "x" que satisfacen el sistema:

$\frac{13x-5}{2} + \frac{3x-8}{5} > \frac{2x+7}{3} + 1$ .... (I)

$\frac{3x-1}{5} - 1 < \frac{x+1}{2} - \frac{x}{7}$ .... (II)

A) 5 B) 9 C) 14 D) 20 E) 27

38. La suma de todos los enteros x que satisfacen el sistema:

$\frac{4x-5}{7} < x + 3$ .... (I)

$\frac{3x+8}{4} > 2x - 5$ .... (II)

es:
A) –21 B) –36 C) –18 D) 18 E) 25

39. En $\Re$ se define la operación: $a * b = \frac{a-b}{2}$; según ello halle el conjunto solución de: $(x-1) * 2 \le (3 * x) * \frac{1}{2} \le (1+2x) * 5$

A) $(2 ; 8]$ C) $(2/3 ; 8/3]$ E) $[1 ; 8/5]$
B) $[2 ; 3]$ D) $[2 ; 8/3]$

40. Si el producto de dos números positivos y diferentes es 1, la suma de ellos es:
A) Siempre menor que 10.
B) Siempre mayor que 2.
C) En algunos casos menos que 1.
D) En algún caso igual a 2.
E) Siempre menor que 2.

41. Un carpintero hizo un cierto número de mesas. Vende 70 y le quedan por vender más de la mitad. Hace después 6 mesas y vende 36, quedándose menos de 42 mesas por vender. ¿Cuántas mesas hizo?
A) 145 B) 157 C) 147 D) 130 E) 141

42. Se desea saber el menor número de libros que hay en un estante, si el doble del número de éstos se le disminuye en 7, el resultado es mayor que 29 y si al triple se le disminuye en 5 el resultado es menor que el doble del número aumentado en 17.
A) 18 B) 19 C) 204 D) 21 E) 22

43. Si al doble de la edad de cierta persona se resta 17 años resulta menor que 35; pero si a la mitad de la edad se suma 3 el resultado es mayor que 15. ¿Cuál es dicha edad?
A) 12 B) 24 C) 25 D) 26 E) 13

44. Entre Pedro y Luis tienen menos de 8 hijos. Luis tiene más hijos que Ramón y aunque Pedro tuviera tres hijos menos, seguiría teniendo más hijos que Ramón. ¿Cuántos hijos tiene Ramón?
A) 2 B) 1 C) 3 D) 5 E) N.A.

45. Se desea saber el menor número de postulantes que rinden un examen conociendo que su doble disminuido en 23 no llega a 95 y que al retirarse 13 quedaron más de las tres cuartas partes del número inicial. Indicar la suma de cifras del número.
A) 7 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

46. Una persona dispone de cierta cantidad para premiar a sus sobrinos. Pensó darles 500 pesos a cada uno, pero le faltaban más de 200 pesos. Después pensó darles 450 pesos a cada uno y le sobraban más de 300 pesos. Por último decide darles 400 pesos a cada uno y le sobraban menos de 875 pesos. Hallar el número de pesos que tenía sabiendo que es múltiplo de 20.
A) 5280 B) 5300 C) 5250 D) 5260 E) N.A.

47. La tercera parte de cierto número disminuida en 3 es mayor que 25; pero la cuarta parte del mismo número disminuida en 2 es menor que 20. ¿De qué número como máximo se trata?
A) 84 B) 85 C) 87 D) 81 E) 80

48. Si a un número de dos cifras se le resta en que resulta de invertir sus cifras se obtiene otro mayor que 71; si la suma de cifras es mayor que 9. ¿Cuántos divisores positivos admite dicho número?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) N.A.

49. Un padre dispone de 320 soles para ir a un evento deportivo con sus hijos. Si toma entradas de 50 soles le falta dinero y si las toma de 40 soles le sobra dinero. ¿Cuántos hijos tiene el padre?
A) 5 B) 4 C) 6 D) 43 E) 70

50. A un estudiante le dieron a vender una cierta cantidad de politos de los que vendió 35 y le quedaron más de la mitad, luego le devuelven 3 y vende después 18 con lo que le restan menos de 22 politos. ¿Cuántos politos le dieron?
A) 69 B) 70 C) 71 D) 72 E) 73

	2-C	3-A	4-C	5-D	6-B	7-C	8-E	9-C	10-C
11-B	12-C	13-B	14-F	15-A	16-E	17-A	18-A	19-C	20-B
21-A	22-D	23-C	24-E	25-D	26-D	27-D	28-C	29-D	30-C
31-B	32-D	33-E	34-C	35-E	36-B	37-D	38-A	39-D	40-B
41-C	42-B	43-C	44-B	45-E	46-A	47-C	48-B	49-C	50-C

3. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real a denotado por $|a|$ se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & si \ a \geq 0 \\ -a, & si \ a < 0 \end{cases}$$

Geométricamente $|a|$ es la distancia entre el punto donde se encuentra a y el cero.

Propiedades

1. $|a| \geq 0, \ \forall \ a \in R \ \wedge |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $|a| = |-a|$
3. $|a.b| = |a|.|b|$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(desigualdad triangular)*
5. $|a| = \sqrt{a^2}$
6. $|a|^2 = a^2$
7. $-|a| \leq a \leq |a|$

Propiedades adicionales

8. $|a| = b \ \leftrightarrow \ b \geq 0 \ \wedge \ (a = b \ v \ a = -b)$
9. $|a| = |b| \ \leftrightarrow a = b \ \vee \ a = -b$
10. *Si* $b > 0$ *entonces:*
   - $|a| < b \ \leftrightarrow -b < a < b$
   - $|a| \leq b \ \leftrightarrow -b \leq a \leq b$
11. $|a| > b \ \leftrightarrow a > b \ \vee \ a < -b$
    $|a| \geq b \ \leftrightarrow a \geq b \ \vee \ a \leq -b$

Ejercicios

1. Resolver la ecuación $\left|2 - \frac{x}{3}\right| = 2$
A){ 0 , 11} B){ 1 , 12 } C){ 11 , 12 } D){ 0 , 12 } E){ 3 , 12 }

2. Resolver la ecuación $|4x - 1| = 5$
A){-1 , 3/2 } B){ -1 , 1/2 } C){ 1 , 3/2 } D){ 0 , 1/2 } E){ 3/2 , 0}

3. Resolver la ecuación $\left|\frac{x+1}{x-5}\right| = 1$
A){ 0 } B){ 2 } C){ 12 } D){ 3 } E){ 5 }

4. Resolver la ecuación $\left|\frac{2x-3}{1-x}\right| = 2$
A){ 0 } B){ 5/4 } C){ 1/2 } D){ 7/3 } E){ 2/7 }

5. Resolver la ecuación $\left|\frac{3x}{4} - 1\right| = 4$
A){ -4 , 11} B){ 20/3 , 12 } C){ 1/6 , 12 } D) { -4 , 20/3 } E){ 3 , 12 }

6. Resolver $|2x + 2| = 6x - 18$
A) x=2 i x=5 B) x=3 i x=5 C) x=–2 i x=3 D) x=5 E) x=2

7. Hallar el C:S: de $\left|\frac{4-x}{3x}\right| = 3$
A) { -1/2 , 2/5 } B){ 1/2 , -1/2 } C){ 1/5 , 12 } D){ 7/3 , 12 } E){ 2/5 , 12}

8. Resolver: $|3x - 1| + 4 = 0$
A){ 0,3 } B) $\varnothing$ C){ 12,3 } D){6, 3 } E){ 5,8 }

9. Resolver $\left|\frac{x^2}{x-1}\right| = 4$ Rpta: { 2 , -2 + 2$\sqrt{2}$, -2 - 2$\sqrt{2}$ }

10. Si 2 > x > y . Calcule el valor de "y" si : $|x - y| + |x - 2| = 3$.
A)1 B)-1 C)2 D)4 E)-2

11. Si y > x ; $|x^2 - y^2| = 27$; $|x + y| = 3$ ¿ Cuál es el valor de " x - y "?.

A)10 B)-11 C)21 D)9 E)12

12. Si $x > 1$ ¿Cuál es el valor de "x" en la ecuación : $|x^2 + 2x + 1| - |1 + x| - |1 - x| = 10$.

A){ -4 , 11} B){ 20/3 , 12 } C){ 1/6 , 12 } D) { -3, 3 } E){ 3 , 12 }

13. Si 3x + 15 = 0. Determine el valor de a+11b si $a = \dfrac{|x+5|}{|x-5|}$

$$b = |x| - \frac{|x-8||x+6|}{|1-2x|}$$

A)14 B)-41 C)21 D)42 E)12

14. Hallar el C:S: de $|2x - 1| > 3$.

A) IR –[-1 , 2] B)[-1 , 2] C)IR–[-2, 1]
D)IR–[-4,2] E)[1, 2]

15. Hallar el C:S: de $\left|3 - \dfrac{x}{2}\right| \leq 2$.

A) [-1 , 20] B) [2 , 10] C)[-2, 10]
D)[-2, 2] E)[10, 20]

16. Hallar el complemento de la solución de $\left|\dfrac{x}{5} - \dfrac{1}{2}\right| \geq 5$.

A)] -45/3 , 55/2 [B)] -45/2 , 55/3 [C)] -45/2 , 55/2 [
D)] -45/4 , 55/3 [E)] -45/4 , 55/4 [

17. Hallar el C:S: de $\left|1 - \dfrac{x}{3}\right| < 1$.

A)] -1 , 20 [B)] 0 , 6 [C)]-2, 6[
D)]-2, 0[E)]0, 20[

18. Resolver la siguiente desigualdad $|x - 3| > -1$,

A)] 0 , +∞ [B)] - ∞ , 0 [C)] - ∞ , +∞ [
D)] 3 , +∞ [E)] -1 , +∞ [

19. Hallar el C:S: de $|3 - 2x| < 0$.

A)] 0 , 1 [B)] - ∞ , 3/2 [C)] - ∞ , +∞ [
D)∅ E)] 3/2 , +∞ [

20. ¿Cuál es el mayor valor entero que satisface $\left|\dfrac{2x-1}{x+3}\right| \leq 1$?

A)2/3 B)-4 C)1 D)4 E)2

21. Hallar la suma del supremo y del ínfimo del conjunto solución de $|3 - 2x| < |x + 4|$.

A)1/4 B7/4 C)2/11 D)4/21 E)20/3

22. La solución de $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| > 2$ es de la forma] a , b [∪] c , d [. Hallar a+b+c+d

A)10 B)14 C)11 D)14 E)21

23. Hallar la diferencia del supremo y el ínfimo del complemento del conjunto solución de $\left|\dfrac{3x+5}{x}\right| \geq 2$.

A)-5 B)1 C)10 D)5 E)-2

24. La solución de $\left|\dfrac{3x-1}{x+7}\right| < 3$ es de la forma] – m/n , + ∞ [; Hallar m.n si m y n son enteros.

A)30 B)-10 C)-30 D)15 E)-20

25. Hallar el mayor de los números que cumple la inecuación $\left|\dfrac{2x-1}{1+2x}\right| \geq 3$.

A)-3/5 B)-1/3 C)-1/2 D)1/5 E)-1/4

26. Hallar el complemento del conjunto solución de $|2x+5| \geq |x+4|$.

A)] -1 , 20 [B)] -3 , -1 [C)]-2, 6[D)]-2, 0[E)]0, 20[

27. Hallar el valor de la expresión $\dfrac{|4x+1| - |x-1|}{x}$ si $x \in]0,1[$

A) -1/4 ,1 B) -1/4 C) 1 D) 5 E) 1, 5

1-D	2-A	3-B	4-B	5-D	6-D	7-A	8-B	9-
10-B	11-D	12-D	13-D	14-A	15-B	16-C	17-B	18-C
19-D	20-D	21-E	22-A	23-A	24-B	25-E	26-B	27-D

TEMA 3

SISTEMAS DE ECUACIONES

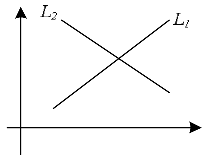
Dado el sistema

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Compatible Determinado

Entonces

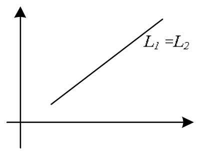
$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$



Compatible indeterminado

Entonces

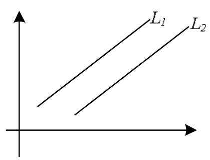
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Incompatible

Entonces

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



Ejercicios y problemas

1. Al resolver el sistema 3x – (4y + 6) = 2y – (x + 18)
   2x – 3 = x – y + 4
   Dar como respuesta la diferencia de las soluciones.
   A) 1/2 B) –1 C) 2 D) –3 E) 4

2. $\frac{x+y}{x-y} = -\frac{2}{7}$; $\frac{8x+y-1}{x-y-2} = 2$
   A) x = –5, y = 9
   B) x = 3, y = 9
   C) x = 2, y = –9
   D) x = 3, y = 2
   E) N.A.

3. En el sistema ax + by = $a^2 + b^2$; bx + ay = 2ab
   Dar como respuesta la suma de las soluciones.
   A) a – b
   B) a + b
   C) a + 2b
   D) 2a – b
   E) 3a – 2b

4. x + y = 5
   y + z = 8
   z + u = 9
   u + v = 11
   v + x = 9
   Hallar el valor de u.
   A) –2 B) 2 C) 3 D) –4 E) 4

5. (a + b) x + (a – b) y = 15
   (2a – 3b) x + (2a – 5b) y = a + 2b
   Si el sistema anterior admite como solución x = 3, y = –7 , hallar el valor de a.
   A) 30 B) –30 C) –60 D) 60 E)–45/2

6. Determinar el valor de “k” para que el sistema:
   2x – 5y + 3z = 0 .... (I)
   x – y + z = 0 .... (II)
   3x + ky + z = 0 .... (III)
   Sea compatible indeterminado.
   A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

7. Calcular “m” para que el sistema sea incompatible
   (m – 3) x + 3y = 5
   2x + (m – 2) y = 7
   A) 1 B) 3 C) 7 D) 5 E) 9

8. Resolver: (a + b) x – (a – b) y = 4 ab
   (a – b) x + (a + b) y = $2a^2 – 2b^2$
   Indicar el valor de: y
   A) a B) b C) a – b D) a + b E) 2a

9. Resolver el sistema: 3x + 2y – z = 3
   –2x + y + 3z = 5
   4x – y – 2z = –1
   e indicar el valor de “y”
   A) 2 B) –2 C) 1 D) –1 E) 0

10. Resolver el sistema: 2x + y + z = 8
    5x – 3y + 2z = 3
    7x + y + 3z = 20
    Señalar el valor de $(x^2 + y^2)$
    A) 10 B) 13 C) 4 D) 5 E) 36

11. Si a, b, c son distintos de ceros:

$$\frac{x.y}{x+y}=a \;;\; \frac{x.z}{x+z}=b \;;\; \frac{y.z}{z+y}=c$$

el valor de "x" es:

A) $\dfrac{abc}{ab+bc+ac}$ D) $\dfrac{2abc}{ac+bc-ab}$

B) $\dfrac{2abc}{ab+bc-ac}$ E) $\dfrac{2abc}{ab+ac-bc}$

C) $\dfrac{2abc}{ab+bc+ac}$

12. Para que valores de "m" el sistema de ecuaciones:

$$x + 2y = m$$
$$3x + 4y = 5$$

Tiene soluciones positivas

A) $5/3 \le m \le 5/2$
B) $5/3 < m < 5/2$
C) $5/3 < m \le 5/2$
D) $3/2 < m < 5/2$
E) N.A.

13. ¿Cuánto debe valer "a" par que en el sistema:

$3x + 7y + 2z = 1$ .... (1)
$2x + 3y + 7z = 1$ .... (2)
$ax + 2y + 3z = 0$ .... (3)

el valor de "y" sea igual al de "z"

A) 1 B) –2 C) 4 D) –3 E) –5

14. Si $\dfrac{xy}{x+y}=a$, $\dfrac{xz}{x+z}=b$, $\dfrac{yz}{y+z}=c$, donde a, b y c son distintos de cero entonces "x" es igual a:

A) $\dfrac{abc}{ab+bc+ac}$ D) $\dfrac{2abc}{ac+bc-ab}$

B) $\dfrac{2abc}{ab+bc-ac}$ E) $\dfrac{2abc}{ab+ac-bc}$

C) $\dfrac{2abc}{ab+bc+ac}$

15. Determinar el valor "m" para que el sistema propuesto presente infinitas soluciones:

$mx + y = 3$ .... (1)
$6x + (m – 1)\,y = 2m$ .... (2)

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. Si el mayor de dos números se divide entre el menor el cociente es 2 y el residuo 4, y si 5 veces el menor se divide por el mayor el cociente es 2 y el residuo 17. Hallar el mayor.

A) 25 B) 24 C) 55 D) 54 E) 36

17. Para qué valor de "m", las raíces (x_1 y x_2) de la ecuación: $4x^2 + mx + 5 = 0$, satisfacen: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -8 \\ x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$

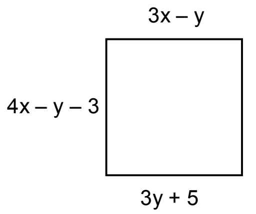
A) –12 B) –6 C) 6 D) 12 E) 18

18. Si el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y - x = 4 \\ x^2 - kx + y^2 = 8x + 8 \end{cases}$

Tiene solución única, hallar la suma de los posibles valores de k.

A) 8 B) 4 C) 6 D) 16 E) 0

19. Se tiene un cuadrado cuyos lados están expresados según:



Calcula el valor de:

$$E = \left[\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}\right]^{-1}$$

A) –1/3 B) –1/2 C) –1 D) 1/3 E) 1/2

20. En el sistema: $\begin{cases} x - 2y = b - 2 \\ 2x + y = b + 1 \end{cases}$

¿Cuál es el valor de b, para tener $x = 3y$?

A) 8 B) 2/5 C) 1/2 D) 5/2 E) 2

21. Hallar el valor de "c" en el sistema:

$3x – 2y = c$ ...... (1)
$2x + 3y = c$ ...... (2)

Sabiendo que el valor de "x" excede el de "y" en 12 unidades.

A) 28 B) 12 C) 39 D) 17 E) 19

22. Para qué valores de "*m*" el sistema de ecuaciones tiene soluciones positivas

$$2x+7y=m$$
$$3x+5y=13$$

A) $\frac{26}{3}\le m<\frac{91}{5}$ B) $<\frac{26}{3}<m\le\frac{91}{5}$

C) $\frac{26}{3}\le m\le\frac{91}{5}$ D) $\frac{26}{3}<m<\frac{91}{5}$

23. Para qué valores del parámetro "k" el sistema: Tiene infinitas soluciones.

$$(k+1)x+(k+3)y=k+12$$
$$(k+17)x+30y=k+72$$

A) 3 B) 3 y 7 C) 1 D) 2 y -1 E) 4 y 1

1–B	2–A	3–B	4–E	5–C	6–B	7–D
8–C	9–C	10–B	11–D	12–B	13–E	14–D
15–C	16–D	17–D	18–E	19–B	20–D	21–C

TEMA 4

ECUACIONES E INECUACIONES CUADRÁTICAS

En numerosos problemas, como la resolución de triángulos rectángulos o el estudio de movimientos físicos con aceleración, aparecen términos desconocidos elevados al cuadrado. Tales problemas se resuelven por medio de ecuaciones de segundo grado, también llamadas cuadráticas.

41. Ecuaciones cuadráticas

Se llama **ecuación cuadrática**, o de segundo grado, con una incógnita a toda aquella que tiene la forma general reducida $ax^2 + bx + c = 0$, siendo $a \neq 0$. En general: $a, b, c \in$ **R**.

Si todos los coeficientes de la ecuación son distintos de cero, se dice que es **completa**.

Si el coeficiente lineal o el término constante son nulos, la ecuación es **incompleta**.

4.2 Resolución y discusión de ecuaciones cuadráticas:

Pueden darse varios casos:

- Si la ecuación es incompleta sin coeficiente lineal ni término independiente ($ax^2 = 0$), la solución es $x = 0$ (doble).
- Cuando es incompleta sin coeficiente lineal ($ax^2 + c = 0$), las raíces son:
$$\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$
- Cuando es incompleta sin término independiente ($ax^2 + bx = 0$), tiene dos raíces:
$$x_1 = 0 \ \vee\ x_2 = \frac{-b}{a}$$
- Una ecuación completa tiene dos raíces, dadas por la fórmula:
$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El valor $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante**, y de su estudio se deduce que

- Si $\Delta>0$, la ecuación tiene dos raíces reales distintas;
- Si $\Delta=0$, existe una única solución doble dada por $x = -b/2a$,
- Si $\Delta<0$ es menor que cero, las son complejas.

4.3 Relación entre las raíces y los coeficientes:

- La suma de las raíces de la ecuación es igual al coeficiente lineal cambiado de signo dividido por el coeficiente principal: $x_1 + x_2 = -b/a$.
- El producto de las raíces es igual al término independiente dividido por el coeficiente principal: $x_1 . x_2 = c/a$.
- Si se conocen la suma: $s = x_1 + x_2$ y el producto: $p = x_1 . x_2$ de las raíces de la ecuación, se tiene que: $x^2 - sx + p = 0$.
- Conociendo la diferencia $d = x_1 - x_2$ y el producto $p = x_1 . x_2$ de las raíces, se deduce que: $x^2 \pm\sqrt{4p+d^2}\ x+p=0$
- Sabiendo el valor de las raíces x_1 y x_2, la ecuación se puede expresar como un producto de binomios: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (**ecuación factorial**).

4.4 Ecuaciones bicuadradas

Estas ecuaciones tienen como forma general: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Al ser de orden 4, las ecuaciones bicuadradas tienen cuatro raíces o soluciones. Se resuelve sustituyendo $y = x^2$, y se obtiene $ay^2 + by + c = 0$.

- Se obtienen las raíces y_1 e y_2 de esta ecuación de segundo grado.
- Se calculan las cuatro raíces de x como

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}\ ;\quad x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$$

Según los valores obtenidos para y_1 e y_2 en la resolución de la ecuación de segundo grado intermedia, pueden darse varios casos:

- Si $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$, la ecuación bicuadrada tiene cuatro soluciones reales.
- Cuando $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$, o bien $y_1 < 0$ e $y_2 > 0$, la ecuación bicuadrada tiene dos soluciones reales y dos complejas.
- Si $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$, la ecuación bicuadrada no tiene soluciones reales (sus cuatro soluciones pertenecen al conjunto de los números complejos).

4.5. Ecuaciones irracionales

Forma general: $ax + n\sqrt{bx + c} = d$

Para resolver estas ecuaciones, se elevan los dos miembros de la ecuación a la potencia que resulte conveniente según el índice del radical.

El procedimiento general de resolución de las mismas consiste en:

- Aislar en uno de los miembros el término que tiene la raíz cuadrada.
- Elevar al cuadrado ambos miembros para eliminar la raíz. Después de simplificar la ecuación resultante, se obtiene una ecuación de segundo grado con una incógnita.
- Se procede a resolver esta ecuación de segundo grado, con arreglo a los métodos habituales.
- Al haberse elevado la ecuación al cuadrado, se ha introducido una solución «falsa». Las dos raíces obtenidas de la ecuación de segundo grado se han de comprobar en la ecuación irracional original; se descubrirá entonces que sólo una de ellas cumple la igualdad de la ecuación. Ésta será su única solución.

Algunas ecuaciones que no son necesariamente cuadráticas, pueden resolverse por los métodos de factorización o por la fórmula cuadrática, si primero se realiza una sustitución apropiada. Como por ejemplo:

$$x^4 + 5x^2 - 84 = 0$$

Haciendo: $x^2 = z$, de donde: $x^4 = z^2$

Reemplazando: $z^2 + 5z - 84 = 0$

$$(z + 12)(z - 7) = 0$$

$$z + 12 = 0 \quad \vee \quad z - 7 = 0$$

$$z = -12 \quad \vee \quad z = 7$$

$$x^2 = -12 \quad \vee \quad x^2 = 7$$

4.6 Ecuaciones Incompletas:

Son de la forma $ax^2 + bx = 0 \quad \vee \quad ax^2 + c = 0$

Para resolver este tipo de ecuación se procede de la siguiente forma:

En: $ax^2 + bx = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

En: $ax^2 + c = 0$

$$\left\{ \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \right.$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE COOPERATIVO Y AUTÓNOMO

1. La suma de las raíces de la ecuación: $3x^2 + ax + a - 6 = 0$ es 4, hallar su producto.

2. La ecuación: $2x^2 + 5x - 1 = 0$, tiene como raíces r y s, hallar:
   A) $r^2 + s^2$
   B) $r^3 + s^3$

3. La ecuación: $3x^2 + 7x - 8$ tiene raíces r y s. Hallar una ecuación que tenga raíces r^2 y s^2.

4. Si r y s son raíces de la ecuación: $x^2 - 3x + 4 = 0$, hallar $(2r + 3s + 1)(3r + 2s - 1) + 2s$

5. Hallar el menor valor de “m” de modo que la ecuación: $4x^2 - mx + 1 = 0$; tenga solución única.

6. Cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones:
   I) $x^2 - x - 1 = 0$
   II) $x^2 - 2x + 3 = 0$
   III) $3x^2 + x - 2 = 0$
   no admite raíces reales.

7. Si la ecuación $2x^2 + 3x + k - 3 = 0$ tiene raíces reales y diferentes; hallar el producto de todos los valor de k, si $k \in \mathbb{N}$.

8. La ecuación: $x^2 - 5x + m + 2 = 0$, posee raíces reales, mientras que: $2x^2 + 3x + m = 0$ posee raíces complejas. Calcular la suma de valores enteros de “m”, que satisface estas condiciones.

9. Determine el mayor valor de "a" en la ecuación cuadrática: $ax^2 + (5 - a)x + 1 = 0$; de tal manera que el producto de las raíces sea igual a la diferencia de las mismas.

10. Si: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 4$; Siendo x_1 y x_2 soluciones de la ecuación:
$x^2 + (b - 2)x + (b - 2) = 0$
Determinar el menor valor que adquiere: $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$

PROBLEMAS

23. Determinar la ecuación cuyas raíces sean –5/6 y –5/3:
A) $9x^2 - 15x + 25 = 0$
B) $18x^2 + 25x + 25 = 0$
C) $18x^2 + 45x + 25 = 0$
D) $18x^2 - 15x + 25 = 0$
E) N.A.

24. Si a, b son las raíces de la ecuación: $x^2 - 9x + 5 = 0$

hallar: $E = \dfrac{ab}{a+b+1}$

A) 1 B) –1 C) 2 D) 1/2 E) N.A.

25. Indique cuál de las siguientes ecuaciones no tiene soluciones reales:

A) $x^2 - 5x + 6 = 0$
B) $4x^2 - 10x + 6 = 0$
C) $12x^2 + 15x - 18 = 0$
D) $x^2 - 18x + 325 = 0$
E) N.A.

26. Si $\{x_1, x_2\} \subset \mathbb{Z}$ y son las raíces de la ecuación:
$x^2 + cx + d = 0$
donde una es el doble de la otra y $3x_1 + x_2 = 21$
hallar c + d
A) 9 B) 18 C) 27 D) 15 E) N.A.

27. Si la siguiente ecuación posee raíces simétricas
$4x^2 - (2m - 1)x - 5 = 0$; hallar "m".
A) 1 B) 1/2 C) 2 D) 4 E) N.A.

28. De la pregunta anterior indique una de las raíces.
A) 0 C) 1 E) $\sqrt{5}/2$
B) –1 D) $\sqrt{5}$

29. Si en la ecuación: $3x^2 - 10x + \sqrt{4m - 7} = 0$
una raíz es el recíproco de la otra, hallar m
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

30. Si {r, s} es el conjunto solución de: $x^2 - mx + m^2 = 0$

hallar: $E = \dfrac{r^2 + 3rs + s^2}{rs}$

A) –1 B) 1 C) 1/2 D) 2 E) –2

31. De la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0 \wedge \{a, b, c\} \subset \Re$; indicar cuál de las siguientes es cierta:

I. Si $-\dfrac{b}{a} > 0$ entonces el producto de las raíces es positivo.

II. Si $\dfrac{c}{a} > 0$ entonces la suma de las raíces es positivo.

III. Si $b = 0 \wedge \dfrac{c}{a} < 0$ las raíces son simétricas.

A) Solo I C) Solo I y II E) Solo III
B) Solo II D) Solo II y III

32. Resolver: $\sqrt{27 - x} = 7 - x$ Y dar como respuesta la suma de raíces:
A) 13 B) 11 C) 2 D) 7 E) 4

33. Si las raíces de la ecuación $x^2 + ax + 56 = 0$ son dos números consecutivos positivos, halla a.
A) 15 B) –15 C) 12 D) –12 E) 10

34. De la ecuación: $x^2 + ax + 2a = 0$, se sabe que la diferencia de sus raíces es $\sqrt{a}$, $a \neq 0$. Hallar la diferencia de las raíces.
A) 9 B) 3 C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{2}$

35. Indique lo verdadero para la ecuación:
$ax^2 + bx + c = 0$
I. Si c > 0, las raíces son positivas.
II. Si b > 2, las raíces no son simétricas.
III. Si $c \neq 0$, sus raíces no son nulas.
A) Solo I C) Solo III E) Todas
B) Solo II D) Solo II y III

36. Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación : $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}=2$

hallar: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

A) 3 B) 1 C) –1 D) –3 E) N.A.

37. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación: $x^2 + bx + b^2 = 0$

hallar: $\frac{b^3}{x_1^3}+\frac{b^3}{x_2^3}$

A) 1 B) –4 C) 2 D) 3 E) 4

38. Si m y n son las raíces de resolver: $\frac{x}{x+a}-\frac{a}{x-a}=2$

hallar: $\frac{m^2+n^2+2mn}{mn}$

A) 2 B) –2 C) 4 D) –4 E) N.A.

39. Si las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - px + q = 0$, son reciprocas entre sí, hallar q.

A) 0 B) –1 C) 1 D) 2 E) N.A.

40. Hallar la ecuación de segundo grado de coeficientes racionales, en donde una de las raíces es: $3 + \sqrt{2}$

A) $x^2 - 7x + 6 = 0$
B) $x^2 - 7x = 0$
C) $x^2 - 6x - 7 = 0$
D) $x^2 - 6x + 7 = 0$
E) N.A.

41. Calcular "m" si las raíces de una ecuación: $(m + 1) x^2 - 2mx + (m - 3) = 0$, son iguales

A) 3/2 B) 2/3 C) –3/2 D) –2/3 E) N.A.

42. Hallar "k" si: $x^2 - 15 - k (2x - 8) = 0$; tiene raíces iguales.

A) 1 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

43. Resolver: $\sqrt{3x+1}-2x=-6$ dar como respuesta la suma de sus soluciones.

A) 7/4 B) 27/4 C) 5 D) –7/4 E) –5

44. Calcular "m" en: $x^2 - 8x + m = 0$; con raíces x_1 y x_2 si: $3x_1 - 4x_2 = 3$

A) 5 B) 10 C) 15 D) 25 E) 35

45. En la ecuación: $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}$; El producto de las raíces es:

A) 0 B) 1 C) ab D) –ab E) N.A.

46. Calcular "m" en: $x^2 - mx + 48 = 0$; con raíces x_1 y x_2 si: $x_1 = 3x_2$

A) 16 B) –16 C) ±16 D) 12 E) ±12

47. Hallar "c" para que en la ecuación: $x^2 - 8x + c = 0$, una raíz sea el inverso multiplicativo de la otra.

A) –1 B) 1 C) 16 D) –16 E) 0

48. Halle el menor valor entero positivo del parámetro "n" para que la ecuación cuadrática en "x": $x^2 + \sqrt{n}\, x + 1 = 0$, presente raíces reales.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Más de 6

49. Dada la ecuación $2x^2 + 3px + p + 4 = 0$, determinar el producto de todos aquellos valores de p que hacen que la suma de los cuadrados de las raíces sea 14.

A) –2 B) –6 C) –8 D) 6 E) N.A.

50. Si el discriminante de una ecuación general de segundo grado es una cantidad positiva y cuadrado perfecto, se afirma que las raíces son:

A) Reales e iguales
B) Racionales e iguales
C) Irracionales y desiguales
D) Enteras y desiguales
E) Racionales y desiguales

51. Si las raíces de: $(2 + 2k)x^2 - (1 + k)x + 4 = 0$; son iguales, el valor de k es:

A) 31 B) 32 C) –1 D) 1 E) N.A.

52. Sabiendo que las raíces de la cuadrática en "x": $x^2 + bx + 30 = 0$, son positivas y la diferencia entre ellas es 7, halle el valor de "b".

A) 13 C) 5 E) Más de una es correcta
B) –13 D) –5

53. Si las ecuaciones: $(2m + 1) x^2 - (3m - 1) x + 2 = 0$
$\wedge$ $(n + 2) x^2 - (2n + 1) x - 1 = 0$
son equivalentes; calcular el valor de "m"

A) –9 B) 6,5 C) 9 D) –6,5 E) 14

54. ¿Para cuántos valores naturales de a, la ecuación de segundo grado, $(a - 3) x^2 + 3x + 2 = 0$, tiene soluciones reales?
A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

55. Hallar el cubo de la suma de las raíces de una ecuación de segundo grado en la que sus tres coeficientes son iguales.
A) 2 B) –1 C) 1 D) 3 E) –2

56. Las ecuaciones: $x^2 + ax + b = 0$ y $x^2 + cx + d = 0$, $a \neq c$, $b \neq d$; tiene raíz común. El valor de esta es:
A) $(b - d) / (a - c)$ B) $(d - b) / (a - c)$ C) bd/ac
D) ac/bd E) N.A.

57. Calcular n–m, sabiendo que las siguientes ecuaciones tienen las mismas raíces:
$(m - 2) x^2 - (m + 2) x - (n^3 + 6) = 0$
$(m - 1) x^2 - (m^2 + 1) x - (4n^3 - 4) = 0$
Nota: Considerar el mayor valor posible para m.
A) –1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

58. Calcular el valor de "t" para que se cumpla que:
$$r^{-2} + s^{-2} = -14^{-1}$$
en la siguiente ecuación:
$$x^2 - tx - x + 28 = 0.$$
r, s: raíces de la ecuación.
A) $t = 1 \vee t = -3$ D) $t = -2 \vee t = 1$
B) $t = 1$ E) $t = -2$
C) $t = -1$

59. Si la ecuación: $Kx^2 + (2K + 1) x + K = 0$, tiene raíces iguales, hallar el producto de las raíces de la siguiente ecuación:
$$(4K + 3) y^2 + 3Ky - 4K^2 + 9 = 0$$
A) 35/8 C) –35/8 E) N.A.
B) 35/4 D) –35/4

60. Hallar "m" en la ecuación: $x^2 + (2m + 5) x + m = 0$, sabiendo que una raíz excede a la otra en 3 unidades.
A) 2 B) –2 C) 4 D) 1 E) –1

61. Si p y q son raíces de la ecuación:
$x (x + 2b) = -2c$, hallar $p^{-2} + q^{-2}$
A) $(b^2 - c^2) c^{-2}$ D) $(b^2 - c) c^{-2}$
B) $(b^2 - c^2) c^{-1}$ E) $(b - c^2) c^{-1}$
C) $(b - c^2) c^{-2}$

62. Si r y s son raíces de la ecuación:
$x^2 - 3ax + a^2 = 0$, hallar : $r^3 - s^3$, si $r^3 - s^2 > 0$
A) $8\sqrt{3}\, a^2$ C) $8\sqrt{3}\, a^3$ E) $8\sqrt{5}\, a^3$

1-C	2-D	3-D	4-A	5-B	6-E	7-C	8-D	9-E	10-C
11-B	12-B	13-D	14-D	15-C	16-D	17-C	18-D	19-C	20-B
21-C	22-C	23-C	24-C	25-B	26-C	27-C	28-E	29-A	30-B
31-A	32-C	33-B	34-B	35-A	36-C	37-A	38-B	39-D	40-E

INECUACIÓN

A partir de un rectángulo de cartón de 40 cm de ancho y 60 de largo deseamos formar una caja recortando cuatro cuadrados, uno en cada vértice, para su doblado posterior. ¿Qué valores podemos dar al lado de los cuatro cuadrados para que el volumen de la caja sea al menos de 5 litros?

Efectuando un análisis algebraico del tema:

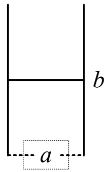
Llamamos "x" al lado del cuadrado, con lo que los lados de la base de la caja medirán respectivamente $60 - 2x$ y $40 - 2x$. La altura de la caja equivale al lado x.

Así ya tenemos el volumen: $(60-2x)(40-2x)x$.

Convertimos los litros a cm^3: 5000 cm^3.
Llegamos así a la inecuación que resuelve el problema: $(60-2x)(40-2x)x>5000$

Por tanto, el problema se resuelve estudiando esta inecuación.

Problema: *Un grupo de alumnos y alumnas del Ceprunsa piensa que igual que el fútbol, nació el fútbol sala, podrían inventar un rugby sala e instalarlo en el gimnasio. Han logrado que les cedan 32 metros de perfiles metálicos para construir dos porterías en forma de hache. Desean un área total entre los perfiles de al menos 20 metros cuadrados. ¿Entre qué límites pueden elegir su altura y anchura?*
La alumna más lista del grupo ha realizado el esquema y el planteo, y ha ofrecido esto a los demás:



Llamó *"b"* a la altura y *"a"* a la base. Como disponemos de 16 metros de perfil por portería, se cumplirá que: $a+2b = 16$ de donde: $a = 16\text{-}2b$ y el área del hueco de la hache:
$A = ab = b(16\text{-}2b)$
Si llamamos "x" a la variable "b", podremos escribir la inecuación: $x(16 - 2x) \geq 20$; o bien: $x(16-2x)-20 \geq 0$

Importante:

I. Si $a > b > 0 \rightarrow \quad a^n > b^n > 0 \quad ; \quad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} > 0; n \in N$

II. Si $a < b < 0 \rightarrow$

1) $a^{2n} > b^{2n} > 0$
2) $a^{2n+1} < b^{2b+1} < 0$; $n \in$ N

III. Si $a < 0 \wedge b > 0$, además: $a < x < b \rightarrow 0 \leq x^2 < Máx\{a^2;b^2\}$

IV. Propiedad del trinomio positivo:
Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$; $P(x) > 0 \quad \leftrightarrow \quad a > 0 \ \wedge \ \Delta < 0$

Ejemplos:

1. Cuál es el conjunto solución de: $3x^2 + 7x - 6 > 0$
Primero hallamos su discriminante: $\Delta = 7^2 - 4(3)(\text{-}6) = 121$
Como $\Delta > 0$, la inecuación tiene dos raíces (puntos críticos) y además es factorizable:

$$(3x-2)(x+3)=0$$

De donde los puntos críticos son: 2/3 y – 3
Ubicándolos en la recta real de los números:

\+   -   +
-3   2/3

Rpta.: $]-\infty, 3[\cup]2/3; +\infty[$

2. Resolver: $2x^2 - 4x + 13 \geq 0$
$\Delta = 4^2 - 4(2)(13) = -88$
Como: $\Delta < 0$, la curva no corta a la recta numérica, pero como es mayor cero, entonces la solución es todos los reales.

Rpta.: **R**

3. Resolver: $\frac{1}{x} > 1$

Restando a ambos miembros 1: $\frac{1}{x} - 1 > 0$

$$\frac{x-1}{x} < 0$$

Puntos críticos: $x = 1 \quad x = 0$

\+ | - | +
0   1

Rpta.: $]0; 1[$

4. Resolver: $\sqrt{x+3} < x+1$

- Determinamos el dominio: $x + 3 \geq 0$, entonces: $x \geq -3$

$$x+1 > \sqrt{x+3}$$
$$(x+1)^2 > \left(\sqrt{x+3}\right)^2$$
$$x^2 + x - 2 > 0$$

- Calculamos los puntos críticos: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$
- Verificamos si las raíces verifican la inecuación irracional:
  Para $x = -2$: $-2+1 - \sqrt{-2+3} = -2$ no es raíz de la inecuación.
  Para $x = 1$: $1+1 - \sqrt{1+3} = 0$ si es raíz de la inecuación
- Determinamos el signo de la inecuación irracional:
  Para: $x \in [-3; 1[$ es (-)
  Para $x \in]1 ; +\infty[$ es (+)   Solución: $x \in]1 ; +\infty[$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. La solución de la inecuación: $-x^2 + 8x - 7 > 0$

A) $\Re$ C) $0 < x < 7$ E) N.A.
B) $-1 < x < 7$ D) $1 < x < 7$

2. Resolver: $\dfrac{(2x-12)(3x+15)(7-x)}{(x+2)} \leq 0$

A) $[-5,2[\cup [6, 7]$ B) $]-\infty, -5] \cup]-2, 6] \cup [7, +\infty[$ C) $[-5,6]-\{2\}$
D) $\Re$ E) N.A.

3. Resolver: $\frac{x+6}{x(x+4)} \geq 0$

A)]–6, 0[B)]–∞, –6] ∪]–4, 0[C) [–6, –4[∪]0, +∞[

D) ϕ E) N.A.

4. Resolver: (x + 4) (x + 2) > 0. Dar como respuesta un intervalo

A) ⟨–∞, –4⟩ C) [4, +∞⟩ E) N.A.

B) ϕ D) $\Re$

5. Resolver: (x + 2) (x + 2) > 0

A)]–2, + ∞] C) [2, + ∞[E)]2, + ∞[

B) ϕ D) $\Re$ – {–2}

6. Resolver: (x – 1) (x – 1) < 0

A)]–1, + ∞] C)]1, + ∞[E) N.A.

B) ϕ D) $\Re$

7. Resolver: (x + 6) (x + 6) ≤ 0

A) [–6, + ∞[B) ϕ C) {–6} D) $\Re$ E)]–∞, –6]

8. Resolver: $x^2 + 1 > 0$

A) [–1, + ∞[C) {–1} E)]–∞, –1]

B) ϕ D) $\Re$

9. Resolver: $x^2 + 6x + 12 \geq 0$

A) [–3, + ∞[C) {–3} E) N.A.

B) ϕ D) $\Re$

10. Resolver: $x^2 + 2x + 2 < 0$

A) [–2, + ∞[C) {–2} E)]–∞, –2]

B) ϕ D) $\Re$

11. Resolver: $\frac{3}{x} < 2$, y dar como respuesta el complemento del conjunto solución

A)]0, 3/2[B) [0, 3/2] C)]–∞, 0[∪ [3/2, + ∞[

D)]–∞, 0[∪]3/2, + ∞[E) N.A.

12. Resolver: $\frac{x+8}{x+3} \geq \frac{x+2}{x+1}$

A)]–1, –1/2] D) [–3, –1] ∪ [–1/2, +∞[

B) [–1, –1/2] E)]–3, –1[

C)]–3, –1[∪ [–1/2, +∞[

13. Si $x \in \langle -2, 3\rangle$, además: $a < x^2 + 10x - 3 < b$ hallar b – a

A) 55 B) –55 C) 36 D) 19 E) N.A.

14. Resolver: (x + 3) (x – 5) (x – 1) < 0

A) ⟨–∞, –3⟩ ∪ ⟨1, 5⟩

B) ⟨–∞, –3] ∪ [1, 5⟩

C) ⟨–∞, 1⟩ ∪ ⟨3, 5⟩

D) ⟨–∞, 1⟩ ∪ [3, 5⟩

E) N.A.

15. Resolver: x (x + 5) ≤ – 4

A) ⟨–∞, –4⟩ C) ⟨–1, +∞⟩ E) [–4, –1]

B) ⟨–4, +∞⟩ D) ϕ

16. ¿Entre qué limites debe estar comprendido “n” para que la inecuación: $x^2 + 2n\,x + n > 3/16$, se verifique para todo valor real de “x”?

A) 4 < n < 5 D) 1/4 < n < 5/4

B) 1/4 < n < 1/2 E) –1/4 < n < 3/4

C) 1/4 < n < 3/4

17. Resolver: $(x-3)^3 (x^2-1)^2 (x-1)^5 x > 0$

A) $x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \left\langle 2, \frac{3}{5}\right\rangle$

B) $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 5, 12\rangle$

C) $x \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$

D) $x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$

E) N.A.

18. Se tiene que: $-1 < x - 1 < 1$, entonces se cumple que: $a < x^2 - 1 < b$ donde:

A) $a + b = 2$ C) $a + b = -7$ E) $a + b = -9$

B) $a + b = 12$ D) $a + b = 8$

19. Resolver: $\sqrt[3]{x-2}\cdot(x^2 - x + 1)^2\cdot(2-x)\cdot\sqrt[5]{1-x} > 0$

A) $\langle 1 , \infty\rangle - \{2\}$ B) $[1 , \infty\rangle$ C) $\langle 1 , \infty\rangle$

D) $\langle 2 , \infty\rangle$ E) $\langle -2 , \infty\rangle$

20. Resolver e indicar el valor que no pertenece al conjunto solución:

$$\frac{x+1}{3} \rangle \frac{x-1}{4}$$

A) 0 B) 1 C) –2 D) –5 E) –10

1–D	2–B	3–C	4–A	5–D	6–B	7–C	8–D	9–D	10–B
11–B	12–C	13–A	14–A	15–E	16–C	17–C	18–A	19–A	20–E

TEMA 5

FUNCIONES

Intuitivamente la palabra **función** se refiere a una asignación o correspondencia de un conjunto a otro. Por ejemplo: Considera un conjunto de estudiantes y un conjunto de edades, en que a cada estudiante le corresponde un número que es su edad en años.

Estudiante	Edad
Esteban	19
Kevin	18
Isabel	21
María	18
Pablo	20

En la tabla se observa que a cada estudiante le corresponde una edad. A ese tipo de asociación se le llama **función**.

Definición: Para dos conjuntos X e Y una función o aplicación es una correspondencia matemática denotada $f : X \to Y$ que asigna a cada x de X, un único $f(x)$ de Y.

En el ejemplo anterior el **dominio** es {Esteban, Kevin, Isabel, María, Pablo} y el **recorrido** es {18,19, 20, 21}. La función se puede ilustrar mediante un diagrama usando flechas para indicar la forma en que se asocian los elementos de los dos conjuntos. Dibuja ese diagrama en el espacio provisto.

Nota: Si x es un elemento en el dominio de la función, entonces el elemento en el recorrido que f asocia con x se denota simbólicamente $\boldsymbol{f(x)}$, y se llama la **imagen de $\boldsymbol{x}$** bajo la función $\boldsymbol{f}$. En el ejemplo anterior f(Kevin) = 18, f(Isabel) = 21. También se conoce la imagen como el **valor de la función $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$**.

También "x" es la variable independiente, "y" es llamado variable dependiente.

<u>**Nota**</u>

El dominio de una función puede estar limitado por:

1.- Por el propio significado y naturaleza del problema que representa.

<u>**Ejemplos**</u>

A. En la función $f(x)=x^2$ el dominio lo forman los números reales. Por ejemplo, $f(-8)= (-8)^2 = 64$. Como la expresión que define la función no tiene restricciones, el dominio de la función es **R**.

B. La función definida por $f(x)=x+1$, tiene como dominio e imagen todos los números reales **R**

C. Con la sucesión de números reales $(a_n)= (-n^2+18)$ (es una función: $f(n)=-n^2+18$) pasa algo parecido pues en principio no tenemos inconveniente en calcular la imagen de cualquier número real. No obstante, la propia definición de sucesión nos hace considerar que solo son posibles las imágenes de números naturales.

2.- Por la expresión algebraica que define el criterio.

A la hora de estudiar la expresión que representa una función tendrás que tener en cuenta tres aspectos fundamentales:

1 El radicando de una raíz de índice par debe ser positivo.

2 Si se trata de una división, el divisor debe ser distinto de cero.
3 La función logaritmo solo admite valores mayores estrictos que cero.

Ejemplos
Calcula el dominio de definición de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$. En este caso, al no aparecer cocientes ni raíces ni logaritmos en los que intervenga la variable x, podemos calcular la imagen a cualquier número real. Por tanto $Dom(f)=$ **R**

2) $f(x)=\sqrt{x-1}$ Como el radicando de una raíz de índice par debe ser positivo, debemos exigir: $x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 1 \rightarrow Dom\,(f)$ = [1;+∞)

3) $f(x)=\frac{5x-4}{x+1}$ Ahora tendremos que los puntos que no pertenecen al dominio son los que anulan al denominador. Veamos cuales son: $x+1=0$ luego $x=-1$. Por tanto el dominio de f serán todos los números reales menos el -1: $Dom(f)=\mathbf{R}-\{-1\}$

4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ Tengo que exigir de nuevo: $1-x^2\geq 0 \rightarrow \; 1\geq x^2 \rightarrow -1\leq x\leq 1$
$\rightarrow \quad Dom(f)=[-1;\ 1]$

Ejercicios
Calcula la imagen de los números 0, 1, 2, y 10 en las siguientes funciones:

1. $f(x)=x^2$ 2. $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ 3. $m(x)=\frac{3x-1}{\sqrt{4-x^2}}$
4. *La sucesión* $f(n)=n^2+3$ 5. $f(x)=\sqrt{4-x}$

5.1 Definición

La gráfica de la función f es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y=f(x)$

Operaciones con funciones Sean la funciones f_1 y f_2, se define:
Suma de funciones: $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$ $\quad Dom(f_1+f_2)=Dom(f_1)\cap Dom(f_2)$
Diferencia de funciones: $(f_1-f_2)(x)=f_1(x)-f_2(x)$ $\quad Dom(f_1-f_2)=Dom(f_1)\cap Dom(f_2)$
Producto de Funciones: $(f_1.f_2)(x)=f_1(x).f_2(x)$ $\quad Dom(f_1.f_2)=Dom(f_1)\cap Dom(f_2)$
Cociente de Funciones: $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $\quad Dom(f_1/f_2)=Dom(f_1)\cap Dom(f_2)-\{x\,/\,f_2(x)=0\}$

Ejemplos
Calcula la función suma de las siguientes funciones con sus dominios respectivos:

1.- $f_1(x)=x^2+1$ y $f_2(x)=-2x^2+4$
$y=(f_1+f_2)(x)=x^2+1-2x^2+4=-x^2+5$.
Además, $Dom(f_1+f_2)=Dom(f_1)\cap Dom(f_2)=$ **R**

2.- $f_1(x)=\frac{x+1}{x}$ y $f_2(x)=\frac{-x+1}{x-1}$

Entonces $(f_1+f_2)(x)=\frac{x+1}{x}+\frac{-x+1}{x-1}=\frac{1}{x}$

Además, $Dom(f_1+f_2)=Dom(f_1)\cap Dom(f_2)=\mathbf{R}-\{0;1\}$

3.- Dadas las funciones $f_1(x)=x+1$ y $f_2(x)=x+2$ calcula $(f_1.f_2)(x)$ así como $(f_1/f_2)(x)$ con sus dominios respectivos.

$(f_1\cdot f_2)(x)=(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$ $\qquad \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x)=\frac{x+1}{x+2}$

Su dominio $Dom(f_1/f_2)=Dom(f_1)\cap Dom(f_2)=\mathbf{R}-\{-2\}$

puesto que el -2 anulará el denominador de la función cociente.

4.- Sean $f(x)=2x-1$; $g(x)=x+3$; hallar $(f+g)(x)$ y (f/g)
$(f+g)(x)=3x+2$; Dom = $\mathbf{R}_1\cap\mathbf{R}_2=\mathbf{R}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{2x-1}{x+3}$; Dom $(f/g)=\mathrm{R}-\{-3\}$

Observa que en la función cociente también hemos quitado del dominio el punto -3 puesto que la función se anula para dicho punto.

5.2 Función compuesta.

Definición
Dadas dos funciones $y=f(x)$, $z=g(y)$, se llama función compuesta $(g\circ f)$ a la función $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Observando este esquema observamos que para que exista la función compuesta es necesario que el recorrido de la función f quede totalmente incluido en el dominio de la función g.

Nota

Si no se verificara esta condición podríamos construir una función compuesta realizando una restricción en los puntos donde no existen problemas. En este caso, el dominio de definición de la nueva función sería:

$$Dom\,(g\,o\,f) = \{x \in Dom(f) \,/\, f(x) \in Dom(g)\}$$

Ejemplos

1.- Estudiar la existencia de la función compuesta de las siguientes funciones y en caso afirmativo calcularla: $f(x)=x+1$ $\quad g(x)=x^2+1$

En este caso el dominio de la función g es todo **R**. Cuando esto ocurra, la función compuesta existe y el dominio de la misma coincidirá con el dominio de f.
Por tanto, en este caso la función compuesta existe y Dom(gof) = Dom(f) = **R**
Además $(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2+1 = (x+1)^2+1 = x^2+2x+1+1 = x^2+2x+2$

2.- Estudiar la existencia de gof en el caso: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ y $g(x)=x^2$

En este caso, Dom(g) = **R** luego el la función gof existe siendo además Dom($g\,o\,f$) = Dom(f) = $(-\infty, -1] \cup (1;+\infty)$

$$(g\circ f) = g(f(x)) = (f(x)) = \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2 = \frac{x+1}{x-1}$$

3.- Dadas las funciones: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x}+3$ estudiar la existencia de gof y de $f\,o\,g$

a) Para $g\,o\,f$

Dom(g) = **R** - $\{0\}$. Por tanto, si existe algún punto del dominio de f tal que $f(x)=0$ entonces no existirá $g\,o\,f$. Veámoslo:

$$f(x)=0 \leftrightarrow \frac{x-1}{x+2}=0 \leftrightarrow x-1=0 \leftrightarrow x=1$$

Por tanto, como existe un punto verificando eso, la función gof no existe en este caso. No obstante construyamos una restricción. Para ello bastará con quitar al dominio de f los puntos que verifican que $f(x)=0$.

Dom(f) = **R** - $\{-2\}$ y Dom(gof) = **R** - $\{-2,1\}$

b) Para $f\,o\,g$

Dom(f) = **R** - $\{-2\}$.

Por tanto habrá que comprobar si existe algún punto tal que $g(x)=-2$:

$$g(x)=-2 \leftrightarrow \frac{1}{x}+3=-2 \leftrightarrow \frac{1}{x}=-5 \leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$$

Como existe un punto en esas condiciones, no existe fog. No obstante construyamos una restricción. Para ello bastará con quitar al dominio de g los puntos que verifican que $g(x)=-2$.

Dom(g) = **R** - $\{0\}$ y Dom(gof) = **R** - $\{-1/5,0\}$

4.- Sean: f:**R**→**R** / $f(x)=x^2$, y g: R→R / $g(x)=x+2$,

Para gof

$$img\,(f) \subset Dom(g) \rightarrow (gof)(x) = g[f(x)]$$
$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = x^2+2$$

Para fog

$$img\,(g) \subset Dom(f) \rightarrow (fog)(x) = f[g(x)]$$
$$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x+2) = (x+2)^2$$

5.3 Definición

Se llama **función identidad** a la función que le hace corresponder a cada número real el propio número. Se representa por I(x).

5.4 Definición

Una función f se dice **inyectiva** o función uno a uno, si verifica que dos puntos distintos no pueden tener la misma imagen. De otra forma:

$$f \text{ es inyectiva} \leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \;\; \text{talque} \;\; f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1=x_2)$$

5.5 Definición

Una función se llama **sobreyectiva** si todo elemento "y" de B es imagen de algún elemento "x" del dominio, es decir f: $A \rightarrow B$ es tal que:

$$\forall y \in B, \exists x \in A \,/\, f(x)=y; \;\; A, B \subset R$$

Por ejemplo, f: **R** → **R** / $f(x)=x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva.

h : **R** → **R** , $h(x)=x^3$ es sobreyectiva.

$f:[0;+\infty)\to \mathbf{R}$ talque : $f(x)=x^2$ es inyectiva.

Definición

Sea $f{:}A\to B$ una función inyectiva, entonces existe la función inversa de f denotada por f^{-1}, donde f^{-1}: $B\to A$ definida por :

$$f^{-1}(y)=x \quad \text{si y sólo si} \quad f(x)=y$$

Ejemplos

1.- Calcular, si es posible la función inversa de $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

En primer lugar debemos estudiar si la función en cuestión es inyectiva o no:

$$f(x_1)=f(x_2)\to \frac{x_1-2}{x_1+1}=\frac{x_2-2}{x_2+1} \quad\to\quad (x_1-2)(x_2+1)=(x_2-2)(x_1+1)\to$$
$$\to x_1x_2+x_1-2x_2-2=x_1x_2+x_2-2x_1-2 \quad\to\quad 3x_1=3x_2\to x_1=x_2$$

Con esto queda probado que la función f es inyectiva y por tanto existe f^{-1}. Calculémosla:

$$y=\frac{x-2}{x+1}\Rightarrow y(x+1)=x-2\Rightarrow$$
$$x=\frac{-y-2}{y-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-x-2}{x-1}$$

5.6 FUNCIONES ELEMENTALES:

5.6.1.LA FUNCIÓN LINEAL

Tiene por ecuación: $y=ax$, *con* "a" se llama **pendiente** y, cuanto mayor sea mayor es la inclinación de la recta que la representa.

5.6.1.1 Características:

-Su dominio es $\mathrm{Dom}(y)=\mathbf{R}$

-Es una función impar (simétrica con relación al origen de coordenadas).

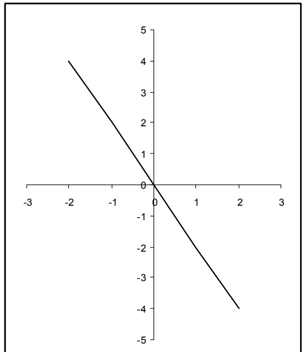
Corta al eje X y al eje Y sólo en el punto (0, 0).

-Crece si $a>0$ y decrece si $a<0$.

-Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas

EJEMPLO

La gráfica de $y=-2x$ es:



5.6.2 LA FUNCIÓN AFÍN

Su ecuación es: $y=mx+b$

"m" es la **pendiente**. "b" es la **ordenada al origen** y representa la distancia desde el punto donde la gráfica corta el eje Y hasta el origen de coordenadas.

Características:

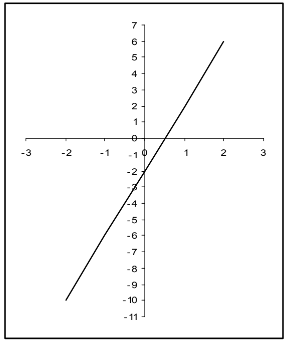
-Su dominio es $\mathrm{Dom}(y)=\mathbf{R}$

-Es continua.

-Corta el eje Y en $(0, b)$ y al eje X en $(-b/m, 0)$.

EJEMPLO

La gráfica de: $y=4x-2$ es:



5.6.3. LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Tiene por ecuación general: $f(x)=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$ y su gráfica es una parábola.

Características:

-Vértice situado en $\left(-\dfrac{b}{2a},f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

-El domino es $\mathrm{Dom}(y)=\mathbf{R}$

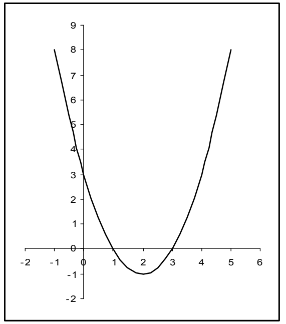
-Es continua. Corta al eje Y en $(0, c)$.

-Si $a>0$, la parábola se abre hacia arriba y si $a<0$, la parábola se abre hacia abajo

EJEMPLO

En la función: $y=x^2-4x+3$

Como $a=1>0$, entonces la parábola se abre hacia arriba y la abscisa del vértice es $(-(-4)/2(1))=2$ y $f(2)=-1$ así el vértice es el punto (2-1). Y la gráfica es:



5.6.3 LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Su ecuación es: $y=\dfrac{k}{x} \quad k\neq 0;$

Su gráfica es una hipérbola que tiene como asíntotas a los ejes coordenados.

Características

-El dominio es: $\mathrm{Dom}(y)=\mathbf{R}-\{0\}$

-La función presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=0$.

-No corta a los ejes de coordenados.

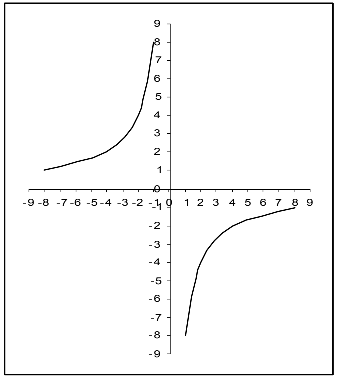
-Es una función impar y simétrica con relación al origen de coordenadas.

EJEMPLO

La tabla de valores de la función $y = \frac{-8}{x}$ es:

x	8	4	2	1	-1	-2	-4	-8
y	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1

Y su gráfica es:



5.6.7. APLICACIÓN DE LAS FUNCIONES A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ejemplo 1:

Encontrar la ecuación de la función afín que pasa por los puntos cuyas coordenadas son (-1, 3) y (4, 7).

Sabemos que una función afín es de la forma:

$y = mx + n$

Sustituyendo x e y por los valores de las coordenadas de los dos puntos dados se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} -m+n=3 \\ 4m+n=7 \end{array}\right\}$$

Restandо miembro a miembro nos da: $\quad -5m = -4 \rightarrow m = \frac{4}{5}$

Y, sustituyendo en la 1ª: $\quad -\frac{4}{5} + n = 3 \rightarrow n = \frac{19}{5}$

Y la función pedida es: $\quad y = \frac{4}{5}x + \frac{19}{5}$

Ejemplo 2:

La compañía telefónica nos cobra mensualmente, 4 por alquiler de la línea y 40 céntimos de euro por cada minuto hablado. Escribe la ecuación de la función que nos da el gasto en relación de los minutos hablados. ¿Cuánto habrá que pagar si hemos hablado 2 horas? ¿Cuántos minutos hemos hablado si hemos pagado 35?

La ecuación de la función es: $\quad y=0{,}4x+4$

Si hacemos $x=120$ minutos. $\quad y=0{,}4*120+4=52$

Si hemos pagado 35, habremos hablado: $\quad 35=0{,}4x+4 \rightarrow x=77{,}5$

Es decir, 1 hora, 17 minutos y 30 segundos.

Ejemplo 3:

¿Cuál es la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (0, 4), (2, 0) y (-2, 0)?

La ecuación general será: $y=ax^2+bx+c$

Para cada uno de los puntos dados obtenemos

$c=4$

$4a+2b+c=0$

$4a-2b+c=0$

Estas dos últimas forman un sistema de ecuaciones (una vez sustituido el valor de c dado por la 1ª) que resuelto da:

$$\left.\begin{array}{r} 4a+2b=-4 \\ 4a-2b=-4 \end{array}\right\} \rightarrow 8a=-8 \rightarrow \qquad a=-1 \quad \wedge \quad b=0$$

Y la ecuación es: $\quad y = -x^2+4$

Ejercicios y problemas

1. Si: $f(x) = \frac{(2x+1)^2-1}{8}$, hallar: f(1) + f(0)
   A) 1 B) 0 C) –1 D) 2 E) 3

2. Si: f(x) = 4x + 2 y H(x) = x^2 – 1, hallar f(H(1))
   A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) –1

3. Si: f(2x+2) = 3x+6, hallar f(6)
   A) 12 B) 6 C) 24 D) 18 E) 15

4. Si: $f(2x–1) = \sqrt{4x-3} + \sqrt{7x+4}$, hallar f(5)

A) $\sqrt{17}+\sqrt{39}$ B) 10 C) 8 D) 12 E) 9

5. Si: $R(x) = 3^x – 2^x$, $S(x) = 4$, $T(x) = R(x) / S(x)$
son correctas
I. R(2) = 5
II. S(1) = S(2) = S(3) = 4
III. T(4) = 75/4

A) Sólo I C) Sólo III E) Todas
B) Sólo I y II D) Sólo I y III

6. Si: $f(x) = 3x + 4$, hallar "z" en: $f(5z) – f(z–1) = 15$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

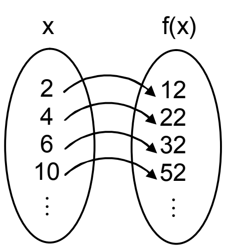
7. Dada la función: $g(x) = nx^2 + m$ se conocen las coordenadas (1, 8); (3, 16).
Dar el valor de: (m+n)/4n

A) 7 B) 8 C) 2 D) 4 E) 1

8. Si g es función:
g(x) = {(0, 2m–n), (0, n), (3, 5p), (0, 2–n), (3, –10–5p) (12, 3–q), (12, 9+2q)}
hallar: (m + n + q) / p

A) –1 B) 1 C) 0 D) 2 E) N.A.

9. De:



Se cumple:
I. f(2) + f(3) = 29
II. f(f(2)) = 61
III. f(x) = 5x + 2

A) Sólo I C) Sólo I y III E) Todas
B) Sólo I y II D) Sólo II

10. Dada la función: $f(x) = \frac{4x-1}{x+6}$ para $x \neq -6$ su inversa es:

A) $\frac{1+6x}{x-4}$ B) $\frac{-(1-6x)}{x-4}$ C) $\frac{1+6x}{x+4}$ D) $\frac{-(1+6x)}{x-4}$ E) $\frac{-1-6x}{x+4}$

11. Dadas las funciones: f = {(3, 4), (2, 5), (-1, 4), (-3, 4)}
g = {(2, 1), (3, -1), (-1, 0), (6, -3), (1, -1)}; El dominio de $\frac{f}{g}$ es:

A) {2, 3} B) {0, 3} C) {-1, 3} D) {-2, 5} E) {4, 1}

12. Si: f = {(-3, 2), (0, 0), (2, 4), (3, -1), (4, 3)}
g = {(2, 0), (3, 4), (4, 7), (6, 2)}. Hallar: f + g

A) {(2, 4), (3, 3), (4, 10)} B) {(2, 4), (4, 2), (6, 6)}
C) {(-1, 2), (3, 4), (6, 11)} D) {(4, 4), (6, 3), (8, 10)} E) ϕ

13. Si $f(x) = 2x^2 – 1$ y g = {(-1, $\sqrt{2}$), (0,1), ($\sqrt{2}$, 9), (3, 12)}, hallar (f+3g)($\sqrt{2}$)

A) $\sqrt{2}$ B) 27 C) 30 D) $18\sqrt{2}$ E) 2

14. Si: f = {(-3, 2), (0, 0), (2, 4), (3, -1), (4, 3)} y g = {(2, 0), (3, 4), (4, 7), (6, 2)},
Hallar: f + g

A) {(2, 0), (3, -4), (4, 21)} B) {(2, 4), (4, 2), (0, 0)}
C) {(4, 0), (9, -4), (16, 21)} D) {(4, 4), (2, 2), (3, 3)} E) ϕ

15. Si f = {(-3, 2), (0, 0), (2, 4), (3, -1), (4, 3)} y g = {(2, 0), (3, 4), (4, 7), (6, 2)}.
Hallar: f . g

A) {(2, 4), (3, 3), (4, 10)} B) {(2, 4), (4, 2), (6, 6)}
C) {(-1, 2), (3, 4), (6, 11)} D) {(4, 4), (6, 3), (8, 10)} E) ϕ

16. Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ y
g(x) = {(-3, 2), (-2, 3), (0, 1), (1, -1), (2, 4), (6, 5)} Hallar el dominio de: (f -g)

A) {-2, -3, 1, 2} B) {-3, -2, 0, 1, 2, 6} C) {-3, -2, -1, 0, 1, 2}
D) {-3, -2, 0, 1, 2} E) {-3,-2, 0}

17. Sean las funciones: f = {(0, -1), (1, 5), (2, 0)} y g = {(0, 1), (1, 0), (2, 4), (3, 8)}
Determinar los elementos de: $\frac{f}{g}$

A) {(1, 0), (-2, 2)}
B) {(0, -1), (2, 2)}
C) {(0, -1), (2, 0)}
D) {(0, -1), (1, 0), (2, 0)}
E) ϕ

18. Dadas las funciones reales: $f(x + 1) = x^2$, $x \in \langle -1, 7]$ y
$g(x - 1) = 2x - 1$, $x \in [1, +\infty\rangle$, hallar: $(f \circ g)(x)$
A) $4x^2$ B) $2x^2$ C) $2x + 1$ D) $x^2 + 2x - 1$ E) $x + 1$

19. Si $f(x) = 2x^2 - 3x$ y $g(x) = x^2 - x + 2$ dos funciones reales, determinar: $(g \circ f)$
A) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x + 2$ B) $4x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 3x + 1$
C) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x - 2$ D) $x^4 + 1$
E) $x^4 - 12x + 7x^2 + x$

20. Si $f(x) = \frac{1}{x+2}$ hallar el rango de la función inversa de f
A) $\mathbf{R} - \{-2\}$ B) $\mathbf{R} - \{2\}$ C) $\mathbf{R} - \{4\}$ D) $[0, 4\rangle$ E) $\mathbf{R}^+$

21. Si f y g son dos funciones definidas por: $f(x) = x^2 - 4$ y
$g = \{(2, -1), (4, \sqrt{5}), (7, \sqrt{5})\}$. Hallar f o g
A) $\{(-3, 2), (1, 4), (7, 1)\}$ B) $\{(2, -3), (4, 1), (7, 1)\}$
C) $\{(0, -1), (1, 0), (2, 1)\}$ D) $\{(0, 4), (1, -3), (2, 0)\}$ E) ϕ

22. Sea la función F dada por: $F = \{ (3; 7a + 2b); (2; 5); (2; a + 2); (3; 5b - 2a) \}$;
Diga cuál o cuáles son funciones:
I. $R_1 = \{(a, b); (b - a; 5); (5; b - a); (a + b; 5)\}$
II. $R_2 = \{(3, b); (b; 3); (3; 8); (9; 2a - b)\}$
III. $R_3 = \{(3, 5); (9; 7); (b; a); (5a; 3b)\}$
A) Solo II y III B) Solo III C) Solo I y III
D) Solo I E) Solo II

23. Sea F la función definida por: $F(x) = \text{sen}\sqrt{(x^2 - a^2)|x^2 - b^2|}$
Donde a y b son constantes. ¿Cuál es el dominio de "F", siendo a < b?
A) $\langle -\infty; -a] \cup [a; +\infty\rangle$
B) IR
C) $\langle -\infty; -b] \cup [b; +\infty\rangle$
D) $\langle -b; -a] \cup \langle a; b\rangle$
E) N.A.

24. Se define f(x) como función par, si se cumple que:
$f(-x) = f(x)$, para todo x. Según esto son funciones pares:
I. $f(x) = -x^4$
II. $f(x) = \sqrt{x}$
III. $h(x) = 8x$
A) Sólo I C) Sólo I y II E) Sólo I y III
B) Sólo II D) Sólo II y III

25. Sea: $g(x) = \begin{cases} \sqrt{2+x}, & -1 \le x < 4 \\ x - 6, & 4 \le x < 8 \\ 3, & 8 \le x \le 100 \end{cases}$ hallar: $M = \dfrac{g(-1) + g(2) + g(7)}{g(98) + g(99) + g(100)}$
A) 1 B) 9/4 C) 4/9 D) 7/6 E) N.A.

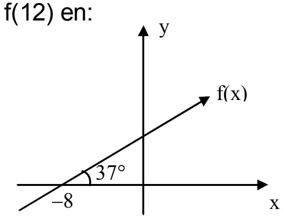
26. Si: $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$; $p(x) = 2x^2$ y $T = \{a \in N / f(a) = p(a+1) - 7\}$
hallar n(T)
A) 0 B) 9 C) 1 D) 2 E) N.A.

27. Si: $G : N \Rightarrow N \wedge G(x) = 3 - \sqrt{7 - x}$; son ciertas:
I. Dom (G) = {0, 3, 6, 7}
II. Ran (G) = {1, 2, 3}
III. n(Dom (G)) = 3
A) Sólo I C) Sólo II y III E) N.A.
B) Sólo II D) Todas

28. Se define la función f en A = {2, 4, 6} donde: $f = \{(2,6); (4, m+3); (n-1, 6); (4,4)\}$
Luego m.n:
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

29. Dadas las funciones de recta: $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 33 - ax$ y además se intersectan en (5, b); hallar a + b
A) 7 B) 13 C) 19 D) 18 E) N.A.

30. Hallar: f(12) en:



A) 14 B) 10 C) 8 D) 19 E) N.A.

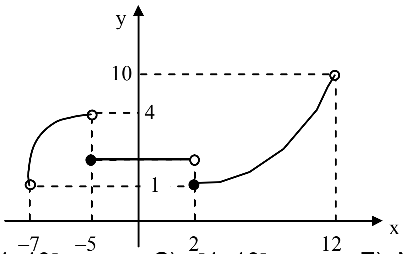
31. Si: $f(x) = 3x + 7$ y $g(x) = 2x + 18$; $A = \{x \in N^+ / f(x) \le g(x)\}$, hallar: n(A)
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

32. Si: $f(x) = \begin{cases} x + 7 & x < 3 \\ 0 & 3 \le x < 10 \\ 2x & x \ge 10 \end{cases}$

hallar: $\dfrac{f(0)+f(5)-f(11)}{f(-2)}$

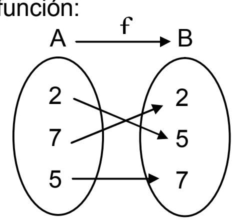
A) 3 B) –3 C) 1 D) –1 E) 0

33. Hallar: Dom(f) $\cap$ Ran(f)



A) [1, 10[C)]1, 10] E) N.A.
B)]1, 10[D)]1, 12[

34. De la siguiente función:



hallar: $\dfrac{f(2)+f(f(7))}{f(f(f(5)))}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/5 E) N.A.

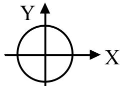
35. Hallar el rango de f(x) = –|x| + 3

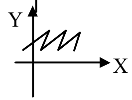
A) $\langle -\infty, 3]$
B) IR
C) R^-
D) $[3, \infty\rangle$
E) IR^+

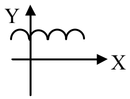
36. Hallar rango: $f(x) = \sqrt{2-x} + 3$

A) $\langle 1, \alpha\rangle$ B) $\langle -2, \alpha\rangle$ C) $[3, \alpha\rangle$ D) $[2, \alpha\rangle$ E) $[2, 3]$

37. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan una función?

I.


II.


III.


A) Solo I D) Solo III
B) Solo II E) Todas
C) Solo II y III

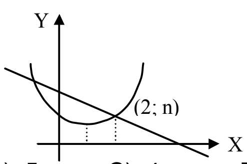
38. Halla el rango de P, si $P(x) = 4x^2 - 16x + 17$

A)] –1 ; 1 [C)] –1 ; ∞ [E) [2 ; ∞ [
B) [1 ; ∞ [D) [–1 ; ∞ [

39. Dada la función f definida según: $f(x) = -2x^2 + 16x - 16$, $1 \le x < 5$
halla Ran (f) – Dom (f)

A) [5 ; 16] B) [–2 ; 1 [∪ [5 ; 16] C) [– 2 ; 5 [
D) [1 ; 16 [E) N.A

40. Halla el valor de a, si (2; n) es uno de los puntos de corte de la parábola cuya ecuación es: $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ y la recta cuya ecuación es: $y = -2x + a$



A) 7 B) 5 C) 4 D) 3 E) 1

41. Resolver: $\dfrac{\operatorname{sign}(x^2+20)+|x^2-4|-1}{\operatorname{Sign}(x^4+3)+1} < 6$

A) [-4; 4] B) <-4; 4> C) [-5; +5> D) <-5; 5> E) N.A.

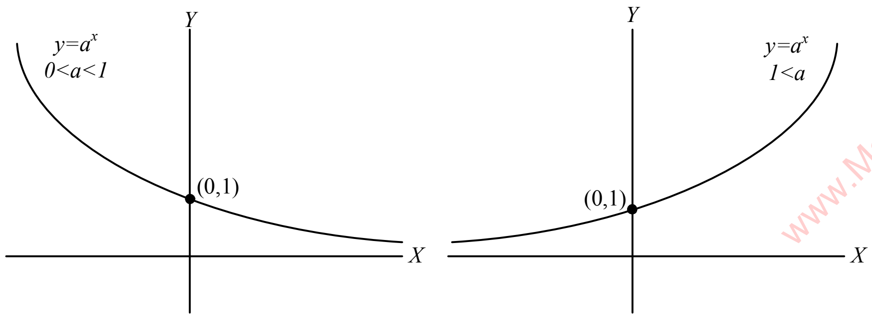
42. Hallar el área del triángulo que se genera por la intersección de la función F: y = 2 - |x + 1|. Con el eje "x"

A) $2u^2$ B) $8u^2$ C) $4u^2$ D) $10u^2$ E) $6u^2$

TEMA 6

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

6.1. Función Exponencial.- Una función exponencial de base a es aquella cuya regla de correspondencia es $f(x)=a^x$; con a real positivo y $a\neq 1$. Donde el $Dom(f)=R$, $Rang\ (f)=]0,+\infty[$.



6.1.1 Ecuaciones e Inecuaciones Exponenciales

a. Si $b^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

b. Si $f(x)^a=g(x)^a \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

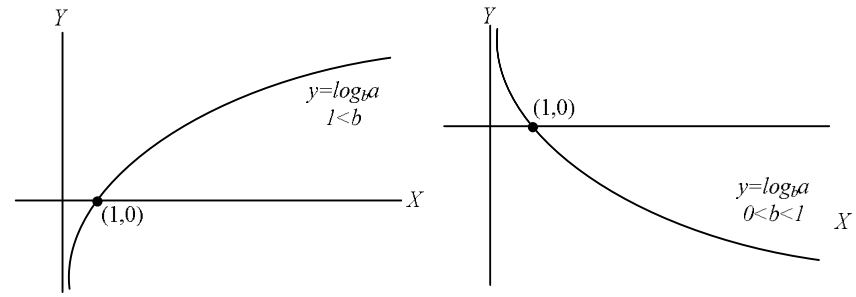
c. Si $b^{f(x)}<b^{g(x)} \leftrightarrow f(x)<g(x)$ cuando $b>1$.

d. Si $b^{f(x)}>b^{g(x)} \leftrightarrow f(x)>g(x)$ cuando $b>1$.

e. Si $b^{f(x)}<b^{g(x)} \leftrightarrow f(x)>g(x)$ cuando $0<b<1$.

f. Si $b^{f(x)}>b^{g(x)} \leftrightarrow f(x)<g(x)$ cuando $0<b<1$.

6.2. Función Logarítmica.- Si $b>0$ y $b\neq 1$ entonces la función $f(x)=log_b x$ se llama función logaritmo de base b cuyo $Dom\ (f)=]0,+\infty[$, $Rang(f)=R$.



6.2.1 Ecuaciones de Logaritmos: $log_b x = N \Leftrightarrow x=b^N$ para $0<b\neq 1$.

a. $b^{\log_b x}=x$

b. $\log_b 1=0$

c. $\log_b b=1$

d. $\log_b xy=\log_b x+\log_b y$

e. $\log_b \frac{x}{y}=\log_b x-\log_b y$

f. $\log_b x^n=n\log_b x$

g. $\log_b \sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_b x$

h. $\log_{b^n} x^m=\frac{m}{n}\log_b x$

i. $\log_b x=\log_{\frac{1}{b}} \frac{1}{x}$

j. $\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$

k. $x=y$ sí y solamente sí $\log_b x=\log_b y$

l. $y^{\log_b x}=x^{\log_b y}$

m. $\log_b x.\log_x b=1$ de aquí $\log_b x=\frac{1}{\log_x b}$

n. $\log_x y.\log_y z.\log_z w=\log_x w$

o. $\operatorname{colog}_b x=-\log_b x$

p. $anti\log_b x=b^x$

6.2.2 Inecuaciones de Logaritmos

Siendo $0<b<1$

$\log_b x>\log_b y \rightarrow x<y$

$\log_b x<\log_b y \rightarrow x>y$

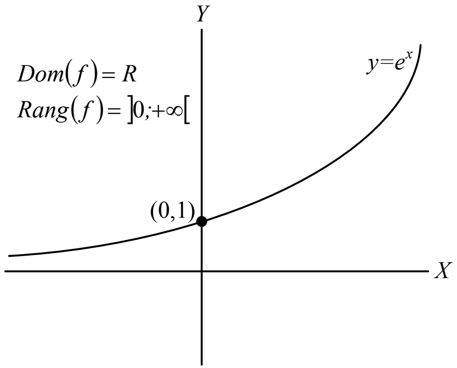
Siendo $b>1$

$\log_b x>\log_b y \rightarrow x>y$

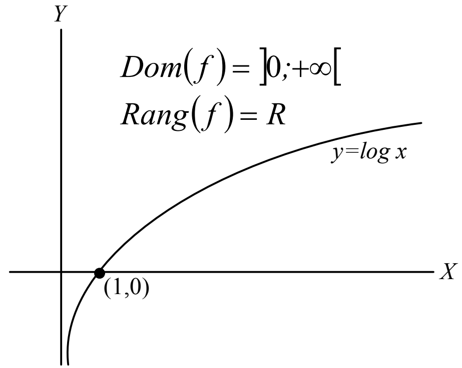
$\log_b x<\log_b y \rightarrow x<y$

6.3. Consecuencias

Función Exponencial base (e)



Función logaritmo de base 10



Observación. Se cumple que: $\log_e x = \ln x$

EJERCICIOS

1. Resolver: $1+2\log x-\log(7x+12)=0$

A) 3 B) 2 C) 3/2 D) 2/3 E) N.A.

2. Hallar el mayor valor de: $5^{\log_{11}\left(x^2-7x+21\right)}=3^{\log_{11}25}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. $\operatorname{Log}_2(\cos 2x)-\operatorname{Log}_2(\operatorname{sen}x)=1+\log_2(\cos x)$

A) $\pi/4$ B) $\pi/8$ C) $\pi/2$ D) π E) 3π

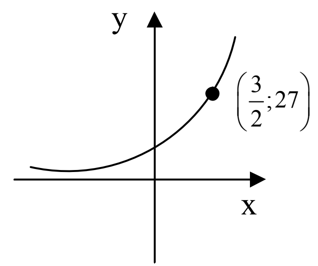
4. Hallar el dominio de la función cuya regla de correspondencia viene dada por:

$F_{(x)}=\operatorname{Log}\left(\dfrac{x^2+x-12}{3x-4}\right)$

A) R B) ϕ C) $x\in\left\langle -4;\dfrac{4}{3}\right\rangle\cup\langle 3;+\infty\rangle$

D) $x\in\langle -\infty;0]$ E) N.A.

5. A partir de la gráfica de cierta función exponencial.



Halle la regla de correspondencia

A) 2^x B) 1 C) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x$ D) 3^x E) 9^x

6. Resolver: $\operatorname{Log}(2x-1)^n+\operatorname{Log}(x-1)^{10^{\log n}}=n$

A) x = 3 B) x = 2 C) x = ϕ D) x = 5 E) x = 6

7. Proporcionar el valor de x si $\operatorname{Log}_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$

A) $C.S=\{1,2\}$ B) $C.S=\{3,4\}$ C) $C.S=\{5,6\}$

D) $C.S=\{2,3\}$ E) $C.S=\{1,3\}$

8. Resolver: $e^{3x}-2.e^{2x}-2e^x-3=0$

A) Ln 2 B) Ln 3 C) Ln 4

D) Ln 5 E) N.A.

9. Luego de resolver: $A=\log_{\sqrt{2}}\sqrt[4]{3}.\log_9 4^{32}+5^{\log 9}.4^{\log 3}$

$B=\operatorname{anti}\log_{\sqrt{2}}\log_{\frac{1}{3}}\left(\operatorname{anti}\log_3 2\right)^{2\operatorname{co}\log_3\operatorname{anti}\log_{\sqrt{3}}(-4)}$ dar el valor de $(AxB)^{-1}$

A) 0,32 B) 0,64 C) 3,2 D) 6,4 E) 1,25

10. Resolver: $\log x=2+\dfrac{1}{2}[\log 18+\log 8-2\log 25]$

A) 48 B) 49 C) 50

D) 51 E) 52

11. Resolver: $\log_6(x+3)+\log_6(x-2)=1$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12. Hallar “a” en: $\log_4(a+2)\log 2=1$

A) 96 B) 97 C) 98 D) 99 E) 100

13. Hallar “a” en: $\log a^3-\log 64=\log(a/2)^2$

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

14. Resolver: $\log\sqrt{x+7}-\log 1{,}2=1-\log\sqrt{x+14}$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 1 E) 2

15. Hallar “x”: $\log x=\dfrac{\log a-(\log b+\log c)}{\log 100}$

A) $\sqrt{\dfrac{a}{bc}}$ B) $\sqrt{\dfrac{1}{bc}}$ C) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

D) $\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$ E) $\sqrt{\dfrac{a}{2}}$

16. Resolver: $\log_{27}(5x-1)^3=\log_9 81+\log_3(3x-5)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. Resolver: $\log_x 3.\log_{x/3} 3+\log_{x/81} 3=0$

A) 9 Y 1/9 B) 9 Y 2/9 C) 9 Y 3/9

D) 9 Y 4/9 E) 9 Y 5/9

18. Resolver: $1+\log_2(x-4)=2\log_2\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}\right)$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

19. Hallar “x”: $10^{\log_a\left(x^2-3x+5\right)}=3^{\log_a 10}$

A) 2 Y 1 B) 3 Y 1 C) 4 Y 2 D) 1 Y 5 E) 2 Y 6

20. Resolver en R^+ $2\log\log x=\log(7-2\log x)-\log 5$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

21. Dada la ecuación $x^{\log x}-\left(\dfrac{10^3}{x}\right)^4=0$ Hallar el producto de las raíces

A) 10^{-1} B) 10^{-2} C) 8^{-2} D) 9^{-1} E) 10^{-10}

22. El valor de “b” que satisface la ecuación: $(\log_b 9)^2-4(\log_b 9)+4=0$

A) 6 B) 3 C) 8

D) 9 E) 10

23. Si “x” es un número real y

$\sqrt[x^2-1]{\log_a\left(x^{x^{\frac{1}{x}}}\right)}=x^{\frac{2}{x}}$ Donde: $a=x^{\left(\frac{1}{x}\right)^x}$; Calcular el valor de “x”

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) 9 E) 10

24. El valor de P que satisface la siguiente igualdad. $\log_b \sqrt[4]{125}=\dfrac{3}{2}$

A) $\sqrt{3}$ B) 7 C) 8 D) 9 E) $\sqrt{5}$

25. Hallar “x” si

$10^x + 10^{-x} = 3$

A) $\log\left[\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right]$ B) $\log\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ C) $\log\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$

D) $\log\left[\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{3}\right]$ E) $\log\left[\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

26. Simplificar la expresión $2^{\log_3\left(8^{\log_4 3}\right)}$

A) $\sqrt{8}$ B) 7 C) 8 D) 9 E) $\sqrt{6}$

27. Sea el sistema. $\log_a x-\log_b y=1$ i $x-y=0.75$

Hallar las soluciones siendo: a = 0.25 y b = 0.5

A) x = 0.25 $\wedge$ y = 1 ; x = 2.25 $\wedge$ y = 3

B) x = 0.25 $\wedge$ y = 1 ; x = 2.25 $\wedge$ y = 2

C) x = 0.25 $\wedge$ y = 1 ; x = 1.25 $\wedge$ y = 3

D) x = 0.25 $\wedge$ y = 2 ; x = 2.25 $\wedge$ y = 3

E) x = 25 $\wedge$ y = 1 ; x = 2.25 $\wedge$ y = 3

28. Si: $10^x + 10^y = P \quad x - y = \log\left[\dfrac{p+q}{p-q}\right]$ Hallar $10^x - 10^y$

A) 4 B) 1 C) 0 D) q E) 2q

29. Resolver: $\text{anti}\ log_x\left(\text{anti}\ log_x\ x\right) = 16$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

30. Resolver $\log_3(5x-1) + \text{colog}_3(3x-5) = 2$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

31. Resolver: $E = \sqrt{a^{\log_{a\sqrt{a}}(100)}}\ .\ \sqrt[3]{\log_b\left(b^{10}\right)}$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

32. Hallar $M = \sqrt[3]{\left|a^2 - b\right|^{\log_2 25}}$ Si: $\log_{\left(a^2+b\right)}\left(a^4 + b^2 - 4\right) = 2$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

TEMA 7

FUNCIÓN POLINÓMICA

Una función polinómica tiene la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0; \quad a_n \neq 0$$

y diremos que tiene grado "n", o sea el mayor exponente al cual se halle elevada x.

El dominio de todas estas funciones polinómicas es el conjunto de los números reales. Son funciones continuas, tienen tantas raíces como indica su grado. En ocasiones una misma raíz se repite (orden de multiplicidad).

La función será llamada incompleta si alguno de los a_i es igual a cero.

7.1 Componentes de un polinomio:
Se llama **término** a cada uno de los distintos grupos que componen un polinomio y que vienen precedidos por un signo + ó -.
Se llama **grado de un término** al exponente con el que figura la indeterminada en ese término (Factor numérico del mismo).
Se llama **término constante** al coeficiente numérico que no contiene variable, solamente posee coeficiente.
En toda expresión algebraica encontraremos grados relativos (están en relación a cada una de las letras de la expresión algebraica) y un grado absoluto (referido a toda la expresión).
Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

7.2 Grado Relativo de un monomio:
El grado relativo de un monomio no es otra cosa que el exponente que afecta a cada letra. (La parte numérica no tiene ninguna importancia).

$$8x^3 y^5$$

GR(x) = 3 (el Grado Relativo con respecto a la letra "x" es 3)
GR(y) = 5 (el Grado Relativo con respecto a la letra "y" es 5)

7.3 Grado Absoluto de un monomio:
El grado absoluto de monomio es la suma de los exponentes de todas y cada una de las letras.

$$8x^3 y^5$$

GA = 3 +5 = 8 (el Grado Absoluto es 8)
Un polinomio es una expresión algebraica que se obtiene al expresar cualquier suma de monomios no semejantes.

7.4 Grado de un polinomio: Es el grado del término de mayor grado.

- El término de primer grado se llama término lineal.
- El término de grado cero se denomina término independiente.

7.5 Grado Relativo de un polinomio:
El grado relativo de un polinomio es el exponente que afecta a cada letra teniendo en cuenta que tendremos tantos grados relativos como letras tenga la expresión algebraica.
El grado relativo de un polinomio esta representado por el mayor exponente de dicha letra o variable.
Ejemplo: $-9x^4y^3 + 14x^6y^5$

- GR(x) = 6 (Grado relativo con respecto a la letra "x" es 6)
- GR(y) = 5 (Grado relativo con respecto a la letra "y" es 5)
- Los grados relativos no son necesariamente del mismo término.

7.6 Grado Absoluto de un polinomio:

El grado absoluto de un polinomio es la suma de los exponentes de todas y cada una de las letras pero teniendo en cuenta que sólo se tomara el valor mayor de los resultados que obtengas. (Se trabaja independientemente cada uno de los términos y se suma los exponentes).

$$9x^4y^3 + 14x^6y^5$$

Primer término= 4+3 sumados dan 7.

Segundo término= 6+5 sumados dan 11.

GA = 6 (el Grado Absoluto es 6)

7.7 Grado de las operaciones algebraicas:

El grado de una operación algebraica se determina después de realizar operaciones indicadas:

- **Grado de un producto:** Se suman los grados de los factores.
- **Grado de un cociente:** Se resta el grado del dividendo menos el grado del divisor.
- **Grado de una potencia:** Está dada por el grado de la base multiplicado por la potencia.
- **Grado de una raíz:** Está dado por la división del grado del radicando entre el índice de la raíz.

7.8 Polinomios especiales:

7.8.1.- Polinomios homogéneos: Son aquellos cuyos términos monomios tienen igual grado. (Al restarlos obtenemos un polinomio nulo).

Grado absoluto = Grado de homogeneidad

7.8.2.- Polinomio Heterogéneo: Son aquellos cuyos términos monomios tiene diferente grado.(Al sumarlos obtenemos un polinomio nulo).

7.8.3.- Polinomios Completos: Un polinomio completo con respecto a una letra es cuando contiene todos los exponentes consecutivos desde el más alto, al más bajo.

Un polinomio es completo si aparecen en todas potencias menores de la variable, a partir de la mayor de ellas. (En caso de ser necesario se completa agregándole con coeficiente nulo los términos faltantes.

7.8.4.- Polinomios Ordenados: Cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados.

Es aquel que con respecto a la letra llamada ordenatriz, los exponentes van de menor a mayor o viceversa.

7.8.5.- Polinomio Mónico: Si su coeficiente principal es 1. (El coeficiente de su mayor término es 1)

7.8.6.- Polinomios Idénticos: Dos polinomios son idénticos si tienen el mismo grado y los términos de igual exponente en x tienen los mismos coeficientes.

7.8.7.- Polinomio idénticamente nulo: Cuando todos sus coeficientes son nulos.

P(x) es equivalente a "0"

7.9 FUNCIONES POLINÓMICAS DE GRADO MAYOR QUE 2.

La gráfica de una función polinómica de primer grado es una línea recta y la de una función polinómica de segundo grado es una parábola vertical.

Indudablemente, un elemento clave en el dibujo de la gráfica de una función polinómica lo constituye la obtención de los interceptos con los ejes; en particular, los interceptos con el eje X. Para obtener éstos últimos debemos resolver la ecuación polinómica correspondiente, recurriendo a los métodos: teorema del factor y la división sintética. Por ejemplo:

- La función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 8 = (x + 4)(x^2 + 2x + 2)$ tiene un intercepto con el eje X en $x = -4$ y un intercepto con el eje Y en $(0, 8)$
- La función $f(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9 = (x + 3)(2x + 1)(x - 1)(x - 3)$
  $f(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9 = (x + 3)(2x + 1)(x - 1)(x - 3)$
  tiene cuatro interceptos con el eje X: en $x = -3$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ y $x = 3$, y un intercepto con el eje Y: $(0; 9)$
- La función $f(x) = 4x^6 - 24x^5 + 45x^4 - 13x^3 - 42x^2 + 36x - 8$
  $f(x) = (x + 1)(2x - 1)^2 (x - 2)^3$ tiene tres interceptos con el eje X en $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$, y un intercepto con el eje Y en $(0; -8)$
- La función $f(x) = 3x^5 - 19x^4 + 16x^3 + 70x^2 - 100x + 48$
  $f(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 4)(3x^2 - 4x + 2)$ tiene tres interceptos con el eje X en $x = -2$, $x = 3$ y $x = 4$, y tiene un intercepto con el eje Y en $(0; 48)$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

1) Efectuar la siguiente multiplicación: $(3x^3 - 5x^2 + 6x - 8)(4x^2 - 5)$

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.

$= 12x^5 - 15x^3 - 20x^4 + 25x^2 + 24x^3 - 30x - 32x^2 + 40$

Se suman los monomios del mismo grado: $12x^5 - 20x^4 + 9x^3 - 7x^2 - 30x + 40$

Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

2) Resolver la división de polinomios:

$P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ $\qquad Q(x) = x^2 - 2x + 1$

$P(x) : Q(x)$

A la izquierda situamos el dividendo. **Si el polinomio** no es completo **colocamos ceros en los lugares que correspondan.**

$$x^5+0x^4+2x^3+0x^2-x-8 \;\; \underline{\big|\, x^2-2x+1}$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.
Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.
$x^5 : x^2 = x^3$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +0x^4 & +2x^3 & +0x^2 & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3 \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & +0x^2 & -x & -8 &
\end{array}$$

Volvemos a **dividir** el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.
$2x^4 : x^2 = 2\,x^2$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +0x^4 & +2x^3 & +0x^2 & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2 \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & +0x^2 & -x & -8 & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & -8 &
\end{array}$$

Procedemos igual que antes.
$5x^3 : x^2 = 5\,x$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +0x^4 & +2x^3 & +0x^2 & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2+5x \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & +0x^2 & -x & -8 & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & -8 & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & -5x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x^2 & -6x & -8 &
\end{array}$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones.
$8x^2 : x^2 = 8$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +0x^4 & +2x^3 & +0x^2 & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2+5x+8 \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & +0x^2 & -x & -8 & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & -8 & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & -5x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x^2 & -6x & -8 & \\
 & & & -8x^2 & +16x & -8 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 10x & -16 &
\end{array}$$

Así, $10x-16$ es el **resto**, porque su **grado es menor que el del divisor** y por tanto no se puede continuar dividiendo. El cociente de la división es x^3+2x^2+5x+8.

Ejercicios resueltos:

1. Sea el binomio: $E(x,y) = ax^{a+2}\,y^3 + 2x^5y^3 - 3x^{b-5}\,y^2 + bx^3y^2$
   Calcular: $a\,.\,b$

   Resolución: Por ser un binomio:
   $ax^{a+2}\,y^3\ ;\ 2x^5\,y^3$ son semejantes
   $-\,3x^{b-5}\,y^2\ ;\ bx^3\,y^2$ son semejantes

   Luego: $a + 2 = 5 \qquad b - 5 = 3$
   $a = 3 \qquad b = 8$
   Entonces: $a.b = (3)(8) = 24$

2. Si: $P\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = x^{2001} - 4x^{1999} + 3x - 1$

   Calcular: $P(3)$

   Resolución: $\dfrac{x+1}{x-1} = 3$ de donde: $x = 2$
   Luego: $P(3) = 2^{2001} - 2^2.2^{1999} + 3(2) - 1$
   $= 5$

3. Si: $f(x) = 3x + 2 \ \wedge\ P(x) = 2\,f(x) + x + 1$
   Calcular: $H = f(4) + P(1)$

Resolución: $f(4) = 3(4) + 2 = 14$

$$P(1) = 2\,f(1) + 1 + 1$$
$$= 2[3(1) + 2] + 2$$
$$= 12$$

Entonces: $H = 14 + 12 = 26$

4. Dado el polinomio:
$P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 12x^2 - 18$. Determinar el coeficiente de x^5 de otro polinomio que al restar de $P(x)$ resulte $-2x^5$.

Resolución: El polinomio sustraendo será de la forma:

$$S(x) = ax^5 - 6x^4 + 12x^2 - 18$$

De donde: $P(x) - S(x) = (4 - a)x^5$

$$4 - a = -2$$
$$-a = -6$$
$$a = 6$$

PRODUCTOS NOTABLES:

Producto algebraico que responden a una regla cuya aplicación simplifica la obtención del resultado.

Los productos notables más importantes son:

Binomio de Suma al Cuadrado
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Binomio Diferencia al Cuadrado
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Diferencia de Cuadrados
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Binomio Suma al Cubo
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

Binomio Diferencia al Cubo
$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

Suma de dos Cubos
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Diferencia de Cubos
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Trinomio Suma al Cuadrado ó Cuadrado de un Trinomio
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

Trinomio Suma al Cubo
$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$$

Identidades de Legendre
$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$$
$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 4ab$$

Producto de dos binomios que tienen un término común
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

COCIENTES NOTABLES

Caso I :

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + b^{n-1}$$ para todo "n" par o impar.

Caso II:

$$\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots + b^{n-1}$$ únicamente si "n" es impar

Caso III:

$$\frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots - b^{n-1}$$ únicamente si "n" es par

Ejemplos:

1. $$\frac{x^7 + y^7}{x + y} = x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - x^1y^5 + y^6$$

2. $$\frac{32x^5 + 243y^5}{x + y} = (2x)^4(3y)^0 - (2x)^3(3y)^1 + (2x)^2(3y)^2 - (2x)^1(3y)^3 + (2x)^0(3y)^4$$
$$\frac{32x^5 + 243y^5}{x + y} = 16x^4 - 24x^3y + 36x^2y^2 - 54xy^3 + 81y^4$$

3. $$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

4. $$\frac{128x^7 - m^5}{2x - m} = (2x)^6(m)^0 + (2x)^5(m)^1 + (2x)^4(m)^2 + (2x)^3(m)^3 + (2x)^2(m)^4 + (2x)^1(m)^5 + (2x)^0(m)^6$$
$$\frac{128x^7 - m^5}{2x - m} = 64x^6 + 32x^5m + 16x^4m^2 + 8x^3m^3 + 4x^2m^4 + 2xm^5 + m^6$$

PROPIEDADES DE LOS COCIENTES NOTABLES

*Para hallar los términos de un cociente notable: $\dfrac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$

1° El exponente del 1° término irá disminuyendo de uno en uno a partir de (n-1) hasta cero inclusive, mientras que el exponente del 2° término irá aumentando de uno en uno a partir de cero hasta (n-1) inclusive.

2° El desarrollo tiene "n" términos.

3° En los cocientes notables que tengan por denominador expresiones de la forma "x-y" los signos de los términos del desarrollo serán positivos.

4° En los cocientes notables que tengan por denominador expresiones de la forma "x+y" los signos del desarrollo serán alternadamente positivos y negativos.

5° Cualquier término del desarrollo de un cociente notable se puede encontrar usando la fórmula:

$$T_k = \pm x^{n-k} y^{k-1}$$

-En donde: "k" es el lugar del término que se pide, "x", representa el 1° término del denominador del cociente notable, "y" representa el 2° término del denominador del cociente notable y "n" es el exponente común al cual están elevados cada uno de los términos del denominador del cociente y que aparece en el numerador.

6° Para que una expresión de la forma: $\dfrac{x^m \pm y^p}{x^n \pm y^q}$

Sea desarrollado como cociente notable debe cumplirse que : $m/n = p/q$

FACTORIZACIÓN

CASOS:

I. Factor común monomio:

Factorizar: $8x^2y^3$ - $10ax^3y^4 + 6bx^4y^5$

FCM : $2x^2y^3$

Entonces: $2x^2y^3\ (4 - 5axy + 3bx^2y^2)$

II. Factor común polinomio:

Descomponer: $3x(x - y + 2z) - x + y - 2z$

Agrupando convenientemente: $3x(x - y + 2z) - (x - y + 2z)$

FCP: $(x - y + 2z)$

$\rightarrow (x - y + 2z)\ (3x - 1)$

III. Por identidades:

Descomponer en factores:

$16x^4y^6 - 81a^6z^4$

$(4x^2y^3)^2 - (9a^3z^2)^2$

$(4x^2y^3 + 9a^3z^2)(\ 4x^2y^3 - 9a^3z^2\ )$

1) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

$(2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2$

$(2x - 3y)^2$

2) $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

3) $x^2 - 8x - 345 = (x - 23)(x + 15)$

4) $2x^3 - x^2y^2 + 2xy - y^3 = (\ x^2 + y\ )(\ 2x - y^2\ )$

5) $15x^4 - 2x^2y - 77y^2$

$3x^2 \qquad -7y$

$5x^2 \qquad 11y$

$(3x^2 - 7y)(5x^2 + 11y)$

6) $27x^3 - 108x^3y + 144xy^2 - 64y^3$

$(3x)^3 - 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 - (4y)^3$

$(3x - 4y)^3$

IV. Por agrupación de términos:

Descomponer:

1) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

$(x^3 - 2x^2) - (x - 2)$

$x^2(x - 2) - (x - 2)$

$(x - 2)(x^2 - 1)$

$(x - 2)(x + 1)(x - 1)$

2) $x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y - 4$

$(x^2 + 2xy + y^2) - (3x + 3y) - 4$

$(x + y)^2 - 3(x + y) - 4$

$(x + y - 4)(x + 1)$

V. Por evaluación(Rufini):

$x^3 - x^2 - 41x + 105$

	1	-1	-41	105
3		3	6	-105
	1	2	-35	0
5		5	35	
	1	7	0	

Rp.: $(x-3)(x-5)(x+7)$

VI. Doble aspa:

$4x^2 \ + \ 4xy \ - 15y^2 \ - 8x \ + \ 76y \ - \ 96$

$$\begin{array}{ccc} 2x & -3y & 8 \\ 2x & 5y & -12 \end{array}$$

Rpta.: $(2x-3y+8)(2x+5y-12)$

VII. Doble aspa especial:

$3x^4 \ - \ 8x^3 \ + \ 3x^2 \ + \ 22x \ - \ 24$

$$\begin{array}{cccc} x^2 & 4 & = & 12x^2 \\ 3x^2 & -6 & = & -6x^2 \\ & & & 6x^2 \end{array}$$

Falta: $3x^2 - 6x^2 = -3x^2 = -3x\,(x)$

Entonces:

$$\begin{array}{ccc} x^2 & -3x & 4 \\ 3x^2 & x & -6 \\ -8x^3 & 22x & \end{array}$$

Rp.: $(x^2-3x+4)(3x^2+x-6)$

RAÍCES DE UNA ECUACIÓN POLINÓMICA:

Dado $P(x)$ un polinomio real de grado "n", se denomina ecuación polinómica de grado "n" con coeficientes reales de la forma: $P(x)=0$

$$\boldsymbol{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0; \quad a_n \neq 0}$$

Ejemplo: $3x^5 - 8x^4 + 6x^2 - x + 1 = 0$

Si para $x = a$, $P(a) = 0 \rightarrow$ "a" es una raíz del polinomio *P(x)*.

Ejemplo:

$2x^3 - 5x^2 - 28x + 15 = 0$

Para : $x = -3$

$2(-3)^3 - 5(-3)^2 - 28(-3) + 15 = 0$

Entonces -3 es una raíz (solución de la ecuación pilnómica.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Toda ecuación polinómica de grado $n \geq 1$, con coeficientes reales, tiene "n" raíces reales o complejas.

Ejemplo: Resolver: $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$

$(x-2)(x^2+4) = 0$

$x-2=0 \ \vee \ x^2+4=0$

$x = 2 \quad \vee \quad x = \pm\sqrt{-4}$

$x = \pm 2i$

$\textit{Conjunto Solución} = \{2; 2i; -2i\}$

TEOREMA DEL RESIDUO

Sea la división: $\dfrac{P(x)}{x+a}$; el resto es: $R(x) = P(-a)$

Ejemplo: Hallar el resto de:

$(3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 8x - 12) : (x-2)$

Resto: $P(2) = 3(2)^4 - 2(2)^3 - 9(2)^2 + 8(2) - 12$

$R(x) = 0$

Cuando el resto es cero, entonces $(x+a)$ es un factor de $P(x)$. En este caso $(x-2)$ es factor del polinomio $P(x)$

RAÍCES REALES

Aplicando la regla de Ruffini se determina un número real "a".

Ejemplo: Resolver: $x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$

Divisores de 12 : $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$ posibles raíces racionales

De los cuales $2, -3$ son raíces racionales y $\pm\sqrt{2}$ son raíces irracionales

RAÍCES RACIONALES

Si la ecuación $P(x) = 0$, posee coeficientes racionales, eliminando denominadores se puede obtener coeficientes enteros.

Resolver: $12x^5 - 26x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 3x - 2 = 0$

$P(1) = 0$ entonces una raíz de la ecuación es : 1

De igual manera: $P(-1/2) = 0$; $P(2/3) = 0$

Por lo tanto: $(x - 1)(x + ½)\,(x - 2/3)(12x^2 - 12x - 6) = 0$

Resolviendo: $12x^2 - 12x - 6 = 0$

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{4}$$

$$Cojunto\ Solucion = \left\{1; -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{2+\sqrt{13}}{4}; \frac{2-\sqrt{13}}{4}\right\}$$

NÚMEROS COMPLEJOS

$$z = \{(a;b)/\ a \in R \ \wedge \ b \in R\}$$

Donde: a = parte real de z

b = parte imaginaria de z

Re(z) = a Im(z) = b

FORMAS DE REPRESENTAR UN NÚMERO COMPLEJO

- **Forma binómico:** $z = a + bi$
- **Forma polar o trigonométrica:** $z = r(\cos\theta + i\,sen\theta) = r\ cis\ \theta$
- **Forma exponencial:** $z = re^{i\theta}$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

En estas formas: $i = \sqrt{-1}$

Potencias de i : $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$

En general: $i^{4m} = 1$ $i^{4m+k} = i^k$

Ejemplos: $i^{279} = i^{4m+3} = i^3 = -i$

$i^{1862} = i^{4m+2} = i^2 = -1$

También: $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{4m} = 0$

OPERACIONES EN ℂ

Dados los complejos: $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

Suma: $(a + c) + (b + d)i$

Resta: $(a - c) + (b - d)i$

Multiplicación: $(ac - bd) + (ad + bc)i$

División: $\left(\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$

Potenciación: $(a + bi)^n$ se multiplica $a + bi$ "n" veces

Raíz cuadrada: $\sqrt{a + bi} = \pm\sqrt{r}\left[\cos\theta/2 + i sen\theta/2\right]$

TEOREMA DE MOIVRE

Si: $z = r\,(\cos\theta + i\ sen\ \theta)$

Entonces: $z^n = r^n\,(\cos n\theta + i\ sen\ n\theta)$, donde $n \in N$

INVERSO DE UN NÚMERO COMPLEJO z^{-1}

Si $z = a + bi$, ($z \neq 0$), entonces:

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Hallar "n" sí : $M = \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{x^2}.\sqrt[n]{x^3}\ldots\sqrt[n]{x^n}$ Es de 6to grado.

   A) 10 B) 11 C) 12
   D) 13 E) 9

2. El monomio: $M = \sqrt[n^n]{x^{n^{3n}}\ \sqrt[n^{-n}]{x^{n^{2n}}}}$

   Es de grado 32. Calcular "n"

   A) 1 B) 1/4 C) 1/4
   D) 2 E) 4

3. Cuál es la suma de coeficientes del polinomio homogéneo $P(x,y) = ax^{a+4} + 3x^a y^b + bx^{b+5}$

   A) 12 B) 11 C) 12
   D) 13 E) 19

4. Si en el polinomio.
$P=4x^{m+n-2}.y^{m-3}+8x^{m+n+5}.y^{m-4}+7x^{m+n-6}.y^{m+2}$ se verifica que la diferencia entre los grados relativos de “x” e “y” es 5 y además el menor exponente de “y” es 3. Hallar su grado absoluto.
A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

5. Calcular m + n para que el polinomio
$P=3x^{m+1}y^{n-3}+7x^{m+2}y^{n-1}+11x^{m+3}y^{n-2}$
Sea de grado absoluto 8 y de grado relativo respecto a “y” igual a 5.
A) 1 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

6. Calcular a + b + c sí el polinomio
$P(x)=3x^2+ax-5+bx^2-11x+c$
Es idénticamente nulo.
A) 11 B) 12 C) 15
D) 13 E) 14

7. EL polinomio P(x) es completo y ordenado ascendentemente, calcular el valor de: (2m – 3n + 4p)
Sí : $P(x)=3x^{p-n+5}-4x^{n-m+3}+7x^{m-6}$
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

8. Si $n^2-3n+4=0$, calcular el grado de: $M(x)=\sqrt[n-2]{x^{n-1}}*\sqrt[n-1]{x^{n-2}}$
A) 1/9 B) 2/3 C) 3/2
D) 1/8 E) 8

9. Siendo: $P(x,y,z)\equiv ax^ay^b+by^bz^c+cx^az^c$
Un polinomio homogéneo; Hallar: $\sqrt[n-1]{\dfrac{(a+b+c)^n}{a^n+b^n+c^n}}$
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

10. Del polinomio de Grado 11:
$P(x,y)=3^5x^{n+3}y^{m+2}+x^{n+2}y^{m-3}$
Se tiene: $GR_x-GR_y=5$ Luego 2m + n es:
A) 15 B) 16 C) 18
D) 14 E) N.A.

11. Calcular el valor de “m + n” con la condición de que el polinomio
$P(x,y)=x^{2m+n-4}y^{m+n+2}y+x^{2m+n-3}y^{m+n+1}+x^{2m+n-2}y^{m+n}$ Sea de grado absoluto 28 y la diferencia de grados relativos a x e y sea igual a 6.
A) 17 B) 15 C) 13
D) 10 E) 9

12. Si el término independiente y el coeficiente principal son iguales en el polinomio:
$P(x)=(x^2-3x+5)(6x^n-x+n)(2x^4+x^2+n+1)(10x^{n-1}-5x^n-1)$ (n >1)
Hallar el grado de P (x)
A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

13. Calcular a + b + c sí el polinomio $P(x)=3x^2+ax-5+bx^2-11x+c$
Es idénticamente nulo.
A) 11 B) 12 C) 15
D) 13 E) 14

14. Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio homogéneo
$P(x,y,z)=a^3x^{a^b}-b^2y^{b^a}+abz^{a^{a-b}}$
A) 38 B) 58 C) 68
D) 78 E) 88

15. Si $F(x)=\dfrac{4x-2}{3x-4}$ Calcular F(2)+F(1)
A) 5 B) 0 C) 1
D) 11 E) 2

16. Si P(x) ≡ 5x + 10, reducir: P(x+1) + P(x+2)
A) 10x + 1 B) 35x –1 C) 10x
D) 10x + 35 E) 5(2x + 6)

17. Encontrar el valor de “N”siendo
$P(x;y)\equiv 4x^{a+3}y^{2b-5}(5^6x^{a+3}y^{4b}-4^7x^{2b}y^{7b+3})$
Un polinomio homogéneo, además $N^{-2}=a^2b^{-2}+2ab^{-1}+29$.
A) 1/8 B) 8 C) 1/16
D) 1/24 E) 1/7

18. Si: $F(x)=ax^2+bx+c$ y además: $F(x-1)=x^2-x+1$
Hallar (a + b + C)
A) 1 B) 2 C) 3
D) – 4 E) 4

19. Si: $F(\sqrt{x}+1) \equiv 3x+2$; hallar: F(x)

A) $3x^2 - 6x + 5$ B) $3x^2 - 12x + 5$ C) $3x^2 - 6x - 5$
D) $x^2 - x + 5$ E) $3x^2 - 16x + 1$

20. Dada la relación; $F(x+2\sqrt{x}) \equiv x+4\sqrt{x}+4$
halle: $F(x-2\sqrt{x})$

A) $x - 4\sqrt{x} + 4$ B) x C) $2x$
D) $x + 4$ E) $\sqrt{x}$

21. Si se sabe que: $x^2+y^2+z^2 = xy+xz+yz$
Calcular el valor de: $M = \sqrt[9]{\dfrac{(x+y+z)^{10}}{x^{10}+y^{10}+z^{10}}}$

A) 4 B) 3 C) 1
D) 5 E) 2

22. Calcular el V.N. de: M = x – y; Si se sabe que:

$x = \dfrac{n^2-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-1}-1}$ ....(1)

$y = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ ....(2)

$x^4+y^4 = 322$ ....(3)

A) ± 5 B) ± 3 C) ± 4
D) ± 6 E) 4

23. Si: $a^2 = b^2 + c^2$; El valor de :
$\sqrt{\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)\left(\dfrac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\dfrac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\dfrac{a+b+c}{2}-c\right)}$
Es:

A) $\dfrac{bc}{3}$ B) $\dfrac{bc}{4}$ C) $\dfrac{bc}{5}$ D) $\dfrac{bc}{2}$ E) $\dfrac{bc}{6}$

24. Marcar la igualdad correcta:
I) $(a+b)^3 = a^3+b^3$ II) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+2ab+2ac$
III) $(a-b)^3 = (b-a)^3$ IV) $(a-b)^2 = (b-a)^2$
V) $(a-2)^2 = a^3 - 6a + 4$

A) I B) I y II C) IV
D) I y III e) A, B, C y D

25. Efectuar: $(x+2)^2(x-1)^2(x+1)^2(x-2)^2$

A) $x^8 - 10x^6 + 33x^4 - 40x^2 + 16$
B) $x^8 + 10x^6 + 33x^4 + 40x^2 + 16$
C) 0
D) $x^8 - 1$
E) $x^6 + 2x^8 + 3x^2 + 2x + 5$

26. De las igualdades:
I). $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+2ab+c^2+2ac+2bc$
II). $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$

A) Solo I es correcta B) Solo II es correcta
C) I y II son correctas D) Ninguna es correcta
E) No se puede afirmar nada

27. Marcar verdadero o falso según corresponda.
A) $(a+b)^2 = a^2+ab+b^2$ ( )
B) $a^2+b^2 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ ( )
C) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ ( )
D) $(x-a)(a+b) = x^2+(a-b)x-ab$ ( )
E) $(a+b)+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ ( )

28. Si: a – b = b – c = 2 ; Hallar el valor de: $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
A) 4 B) 8 C) 12
D) 16 E) 20

29. Si: a + b + c = 0. Hallar el valor de: $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}$

A) 3 B) -3 C) 1
D) 0 E) 6

30. Si: yx = b ; $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = a$ entonces $(x+y)^2 = A$

A) $(a + 2b)^2$ B) $a^2 + b^2$ C) b(ab + 2)
D) ab(b + 2) E) 1/a + 2b

31. Si: $xy^{-1} + yx^{-1} = 2$
Calcular el valor de:
$M = \frac{(3x^n + y^n)^2}{x^{2n}} + \frac{x}{y}$
A) 20 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

32. Si: $a + b = 2,\quad ab = 3$
Calcular el valor de: $M = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$
A) 6 B) 5 C) 3
D) 7 E) 4

33. Si se sabe que; $x = \sqrt{2} - 1$. Calcular:
$M = x^5 - 5x^3 + 2x^2 + x + 1$
A) -2 B) $\sqrt{2}$ C) 4
D) 3 E) 2

34. A partir de la igualdad: $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = 4$
Calcular el V.N. de:
$M = \frac{x(x + yz) + y(y + xz) + z(z + xy)}{x(x - yz) + y(y - xz) + z(z - xy)}$
A) 8 B) 6 C) 9
D) 7 E) 5

35. Si a + b + c = 0, entonces:
$E = \frac{(a + b - 2c)^2 + (a + c - 2b)^2 + (b + c - 2a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$
A) 9 B) 8 C) 11
D) 10 E) 7

36. Si se sabe que: $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = 3(a - b)$
Calcular el valor de: $\frac{4(a^8 + b^8)}{(a^2b^2)^2}$
A) 7 B) 6 C) 8
D) 9 E) 5

37. De las igualdades:
$A = \frac{x^2 - (y - z)^2}{(y + z)^2 - x^2}$; $B = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}$
Calcular: E = A + B + A.B
A) 2 B) 4 C) 0
D) 3 E) 1

38. Si se sabe que: $\frac{2x}{y} = \sqrt{\frac{1 + xy}{1 - xy}}$ Calcular el valor de:
$E = \left(\frac{2x + y}{2x + y} + \frac{2x - y}{2x + y}\right)\left(\frac{2x + y}{2x - y} - \frac{2x - y}{2x + y}\right)(4x^2 - y^2)$
A) 16 B) 17 C) 18
D) 15 E) 14

39. Calcular el valor de: $E = \frac{(x + a)(x + b)}{a + 2x + b} - \frac{x^3}{ab}$; Si
(a + 2x + b)(a - 2x + b) = $(a - b)^2$
A) 11 B) 0 C) 4
D) 2 E) 3

40. Calcular el valor de: $(1 + x)(1 - x)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2)(1 + x^6 + x^{12})$
Sabiendo que: $x = \sqrt[6]{2}$
A) -5 B) -6 C) -4
D) -7 E) -8

41. Al reducir: $E = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
Se obtiene:
A) 11 B) 10 C) 9
D) 8 E) 7

42. Calcular: $M = \sqrt{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ si x = 0.75
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

43. Si se sabe que: $x + \frac{1}{x} = 1$ hallar: $G = \sqrt[5]{x^5 + \frac{1}{x^5}}$
A) 0 B) 2 C) 3
D) 1 E) 5

44. Sabiendo que a > b; Además: $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=3$..........(I)

Calcular: $E=\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}$

A) 5 B) 4 C) 44
D) 32 E) $\sqrt[3]{4}$

45. Si: a + b + c =0 ; Calcular: $H=\frac{2abc}{(a^2+ac+bc+ab)(b+c)}$

A) 2 B) 3 C) -2
D) -3 E) 4

46. Si: (a + b + c – d) (a + b – c + d) = (c + d + a – b) (c + d – a + b)

Calcular: $M=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

A) 0 B) 3 C) 1
D) 2 E) -1

47. Si: $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{(a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)^2}=4$

Calcular:

$M=\frac{7a+3b}{a+4b}$

A) 3 B) 2 C) -2
D) 4 E) 1

48. Si: $a^3+b^3+c^3=0$, entonces el valor de:

$$E=\frac{3abc}{a(b-a)+b(c-b)+c(a-c)}$$

A) a + b – c B) a – b + c C) –a + b – c
D) a – b – c E) a + b + c

49. A partir de: a + b + c = 0. Indicar el valor de:

$M=\frac{a^5+b^5+c^5}{abc(ab+ac+bc)}$

A) -5 B) -4 C) -2
D) -6 E) -3

50. Hallar el término octavo del desarrollo de: $\frac{x^{10}-y^{10}}{x-y}$

A) x^2y^2 B) xy C) x^3y^3
D) x^2y^7 E) xy^{-1}

51. Hallar el término 10mo del desarrollo de: $\frac{x^{24}-y^{24}}{x-y}$

A) $x^{14}y^9$ B) $x^{14}y$ C) x^9y^{14}
D) xy E) 1

52. El término de lugar 4 del cociente de:

$\frac{x^a-y^a}{x^3-y^3}$ contiene un “x” cuyo grado relativo es 0.

Hallar la suma de coeficientes de dicho cociente:

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

53. Si el término que ocupa el lugar 10 del cociente de: $\frac{x^n-y^n}{x^2-y^2}$ tiene un “x” cuyo grado relativo es: $\left(\frac{n}{2}\right)$. Hallar el número de términos del cociente:

A) 10 B) 20 C) 15
D) 12 E) 16

54. El cociente de $\frac{x^m-y^n}{x^a+y^b}$. Tiene 12 términos. Si el 4to término contiene un “x” de grado 16 y a + b = 5. Hallar “n”

A) 24 B) 36 C) 18
D) 42 E) 48

55. Simplificar la expresión:

$$E=\frac{x^{6n-3}-x^{6n-6}+^{6n-9}-......+x^9-x^6+x^3-1}{x^{3n-3}-x^{3n-6}+x^{3n-9}-....+x^9+x^6-x^3+1}$$

A) x^{3n} B) $x^{3n}-1$ C) $x^{3n}+1$
D) 1 E) 2

56. Hallar “n” si el cociente es notable: $\frac{x^{5n+3}-y^{5(n+6)}}{x^{n-1}-y^{n+2}}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

57. Indicar cuántos términos tiene el siguiente desarrollo $\frac{x^{7n}-y^{6n}}{x^7-y^6}$, sabiendo que, el término del lugar 7 tiene como grado absoluto 57.
A) 10 B) 8 C) 6
D) 12 E) 9

58. Indicar el coeficiente del término de primer grado del cociente de:

$$\frac{2x^5-\sqrt{2}x^4+5x^3+3\sqrt{2}x^2-5\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$$

A) $-8\sqrt{2}$ B) 2 C) $-3\sqrt{2}$
D) 16 E) N.A.

59. Calcular p y q. si la división es exacta $\frac{x^4+px^2+q}{x^2-6x+5}$ indicar p + q.
A) 1 B) -1 C) 2
D) -2 E) N.A.

60. Calcular m y n si el resto de la división $\frac{12x^4-23x^3+8mx^2-35x+n}{4x^2-5x+m}$, es 2x – 3, indicar: m + n.
A) 31 B) 32 C) 33
D) 34 E) 1

61. Hallar el resto de la división $\frac{x^{367}-2}{x^2-x+1}$
A) x-2 B) x + 2 C) x^2+1
D) x + 1 E) N.A.

62. Hallar el resto de dividir:

$$\frac{(x+2)^{82}-4(x+2)^{63}+5(x+2)^{24}+3(x+2)^3-7}{x^2+4x+5}$$

A) x + 2 B) 2x + 1 C) 2x- 1
D) x + 1 E) x-1

63. Un polinomio de tercer grado cuyo primer coeficiente es 1 es divisible por (x–2) y (x–1) y al ser dividido por (x –3) da resto 20. Hallar P(0).
A) 14 B) –14 C) 7
D) –7 E) 8

64. Hallar el resto en: $\frac{(x-5)^{11}+(x-4)^{13}+2}{(x-5)(x-4)}$
A) 3x B) 6x + 8 C) 3x+5
D) 2x–7 E) N.A.

65. Efectuar la división $\frac{nx^n-x+n}{x-1}$ y dar como respuesta la suma de coeficientes del cociente:
A) n^2 B) (n - 1) C) $(n^2 - 1)$
B) (n – 2) E) n^3

66. El residuo que se obtiene al dividir $\left(2x^{2n+3}-2x^3+4\right)$ entre $\left(x^2-1\right)$ es :
A) 6 B) 5 C) 2
B) 1 E) 4

67. Hallar el valor de (a^{b}) si la división es exacta: $\frac{ax^4+bx^3+7x^2+4x+3}{3x^2+x+3}$
A) 81 B) 82 C) 83
B) 84 E) 80

68. Calcular el resto: $\frac{x^6+2\sqrt{2}x^5+2\sqrt{2}x^3+2\sqrt{2}x+7}{x-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
A) 9 B) 8 C) 7
B) 6 E) 5

69. Dividir: $\frac{15x^4-6x^3-5x^2+7x-2}{5x-2}$ y dar como respuesta la suma de coeficientes del cociente:
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) N.A.

70. Calcular el resto en: $\frac{x^{28}+2x^{27}+3x^2-7x+9}{x^2+2}$
A) 3 – 7x B) 7x - 3 C) 9 – 7x
D) 7x - 9 E) N.A.

71. Hallar el polinomio P(x) de grado 3 si es divisible entre (x - 2) y (x + 3) y cuya suma de coeficientes es -4 y tiene por término independiente a 6.
A) (x - 2) (x + 3) (2x - 1) B) (x + 2)(x + 3)(2x - 1)
C) (x + 2) (x + 3) (2x + 1) D) (x - 2) (x - 3) (2x - 1)
e) N.A.

72. Al dividir un polinomio P(x) entre (x + 1) y (x - 1) se obtiene como restos 2 y 4 respectivamente. Hallar el resto de dividir dicho polinomio entre $x^2 - 1$

A) x + 2 B) x – 2 C) x + 3
D) x - 3 E) N.A.

73. Un polinomio P(x) de tercer grado se divide separadamente entre (x - 1); (x - 2) y (x + 3); dando como resto común 5. además al dividirlo entre (x + 1) da un resto igual a 29. Calcular el término independientes de P(x)

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 17

75. Factorizar: $8x^2 y^3 - 12x^3 y^4 + 20x^2 y^8$; e indicar el número de factores en total.

A) 24 B) 23 C) 21 D) 19 E) N.A.

76. Factorizar: Z = ac + bc + ay + by + a + b

A) (a + b) (c + y)
B) (a + b) (c + y + 1)
C) (a + b) (c + y – 1)
D) (a – b) (c + y + 1)
E) (a – b) (c + y – 1)

77. Factorizar: $4a^2 x^4 - z^2$

A) $(2x^2 + z)(2ax^2 - z)$
B) $(2ax^2 + z)(2x^2 - z)$
C) $(2ax + z)(2ax - z)$
D) $(2ax^2 + z)(2ax^2 - z)$
E) $(2ax^2 + z)(2ax^2 - z^2)$

78. Factorizar: $(2x - 3)^2 - (x - 5)^2$

A) (4x – 5) (2x + 1)
B) (3x – 8) (x + 2)
C) (x + 7) (x + 2)
D) (3x + 5) (x – 2)
E) N.A.

79. Factorizar: $4x^2 - (x + y)^2$; e indicar el factor primo de mayor suma de coeficientes

A) 3x – y C) 4x – y E) x + y
B) 3x + y D) 5x + y

80. Factorizar: $4x^2 + 12xy + 9y^2$

A) $(2x + 3y)^2$ C) $(3x^2 + 2y)^2$ E) N.A.
B) $(2x - 3y)^2$ D) $(2x^2 - 3y)^2$

81. Factorizar: $8x^6 + 343$ e indicar la suma de los coeficientes de uno de sus factores primos

A) 5 B) 12 C) 39 D) 45 E) N.A.

82. Factorizar: $27x^6 - 125$

A) $(3x^2 + 5)(9x^4 + 15x^2 + 25)$
B) $(3x - 5)(9x^4 + 15x^2 + 25)$
C) $(3x^2 - 5)(9x^2 + 15x^2 + 25)$
D) $(3x^2 - 5)(9x^4 - 15x^2 + 25)$
E) $(3x^2 - 5)(9x^4 + 15x^2 + 25)$

83. Factorizar: $m^2 n^4 + 2mn^2 + 1$

A) $(mn^2 - 1)^2$ C) $(m^2n - 1)$ E) $(mn + 1)^2$
B) $(mn^2 + 1)^2$ D) $(m^2n + 1)^2$

84. Factorizar: $(x + z)^2 - (y - w)^2$

A) (x + z + y + w) (x + y – z – w)
B) (x – z – y – w) (x + y + z + w)
C) (x + z + y – w) (x + z – y + w)
D) (x + y) (y + w)
E) N.A.

85. Factorizar: $(4x^2)^2 - 8(4x^2) - 105$

A) $(4x^2 + 15)(4x^2 - 7)$
B) $(x^2 - 15)(x^2 + 7)$
C) $(4x^2 - 15)(4x^2 + 7)$
D) $(4x^2 + 15)(x^2 - 7)$
E) $4(x^2 + 15)(x^2 - 7)$

86. Factorizar: $4m^2 - 4m(n - m) + (n - m)^2$

A) $(3m - n)^2$ C) $(2m + n)^2$ E) N.A.

B) $(3m + n)^2$ D) $(2m - n)^2$

87. Factorizar: $216a^3 - 1$

A) $(6a - 1)(36a^2 + 6a + 1)$

B) $(8a + 1)(8a - 1)$

C) $(8a - 1)(64a^2 + 8a + 1)$

D) $(6a + 1)(36a^2 - 6a + 1)$

E) N.A.

88. Al factorizar $x^6 - 1$ resulta que el número de factores trinomios es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

89. Factorizar: $x^4 - 13x^2 + 36$; e indicar el número de factores binomios.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) N.A.

90. Sean: z_1 = cis 60º y z_2 = cis 30º

Hallar: $z_1.z_2$

A. 1 B. 0 C. -1 D. i E. –i

91. Hallar el resultado de: $\dfrac{(2+3i)(1-4i)}{i^{180}}$

A. (10;-5) B. (14; -2) C. (10;-2) D. (14; -5) E. (12; -5)

92. Hallar el valor de x, para que la suma de los números complejos:

$z_1 = x + 5i$; $z_2 = -5 + 7i$ sea imaginario puro.

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

93. Hallar el valor de "m", para que al dividir $z_1 = 3 + im$ entre $z_2 = -2 + i$ de cómo resultado un número imaginario puro.

A. 5 B. -4 C. 6 D. 3 E. -5

94. Después de efectuar la operación: $\dfrac{(7-4i)(2-i)}{5+3i}$

La parte real del resultado es:

A. 5/34 B. 105/34 C. 14/5 D. -12/5 E. 0

95. Respecto al resultado de la operación: $\dfrac{(4-5i)^2(2i)}{7+3i}$

Señalar cuáles afirmaciones son verdaderas(V) o falsas(F).

I. La parte real es mayor que la parte imaginaria

II. Re(z) + Im(z) = 138/58

III. El Re(z) es negativo y el Im(z) es positivo.

A. VVV B. VFV C. VVF D. FFV E. FFF

96. Determinar el valor de x para que el producto: $(x + 3i)(\sqrt{2} - i)$

Sea un número real.

A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}$ E. 2

97. La diferencia de dos números complejos es – 4 – 6i. La parte imaginaria de uno de ellos es – 2 y el producto de ellos es imaginario puro. Uno de dichos números complejos es:

A. $(2+\sqrt{5}) - 8i$ B. $(-2 - 2\sqrt{5}) - 8i$

C. $(2+2\sqrt{5}) + 6i$ D. $(3 + \sqrt{5}) - 8i$ E. $(4 + \sqrt{5}) - 4i$

98. Hallar la raíz cuadrada de: $z = 5 - 12i$

A. $\pm(3 - 2i)$ B. $\pm(3 + 2i)$ C. $\pm(4 - 3i)$

D. $\pm(4 + 3i)$ E. $\pm(13 - 8i)$

99. Una de las raíces de la ecuación $9x^4 - 1 = 0$ es:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}i$ D. $-\sqrt{3}i$ E. $\sqrt{3}$

100. Una de las raíces de la ecuación: $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$ es :

A. -1/2 B. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

101. El cociente de dos números complejos es imaginario puro. Su suma es 5 y el módulo del dividendo es el doble que el del divisor. Uno de dichos complejos es:

A. 4 + i B. 2 + i C. 4 – i D. 2 – i E. 4 + 2i

TEMA 8

MATRICES

81. Conceptos generales sobre matrices

Una **matriz** es un conjunto de números o expresiones numéricas que se ordenan como una tabla de **filas** y **columnas**. Cada una de las intersecciones de filas o columnas se denomina **elemento** de la matriz.

Por convenio, las matrices se representan así:

$$A = (a_{ij})_{mn} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El número m nos indica el número de filas que tiene la matriz y el número n indica la cantidad de columnas que tiene la matriz.

Ejemplo:

Esta matriz es de orden 3×4 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 7 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Una matriz formada por "m" filas y "n" columnas se dice que tiene **orden** o **dimensión** $m \, x \, n$.

8.2. Clases de matrices

Si la matriz tiene m filas y n columnas, ($m \neq n$) la matriz se llama **rectangular**. Cuando el número de filas y el de columnas coinciden, la matriz es **cuadrada**, con dimensión $n \, x \, n$ y se le considera matriz de orden n; en este caso, los elementos de la matriz de subíndices $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ ocupan la llamada **diagonal principal** de la matriz. Esta diagonal adquiere importancia en la resolución de **determinantes**. La traza de una matriz es la suma de todos los elementos de la diagonal principal de la matriz.

Una matriz cuadrada se denomina **triangular** cuando todos los elementos situados por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos.

<u>*Matriz columna:*</u> Matriz $mx1$ (matriz que solo tiene una columna).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}$$

<u>*Matriz fila:*</u> Matriz $1xn$ (matriz que solo tiene una fila).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$

***8.2.1**<u>Matriz nula:</u>* Matriz mxn con todos sus elementos iguales a cero . Se denota por $\mathbf{O}_{mxn}$; en ocasiones se abrevia a **O** cuando se sobreentiende el tamaño o no es necesario especificarlo**.**

***8.2.2** <u>Matriz diagonal:</u>* Una matriz cuadrada se llama *diagonal* si son cero los elementos que no pertenecen a su diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

8.2.3 *<u>Matriz identidad:</u>* Una matriz cuadrada se llama *matriz identidad* si es diagonal y los elementos de su diagonal principal valen la unidad. Se usará la notación I_n, donde n es el orden de la matriz. A veces se utiliza la notación abreviada I cuando el orden se sobrentiende o no es necesario especificarlo.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.2.4 *<u>Matriz transpuesta:</u>* Sea A una matriz de orden mxn. Llamaremos matriz transpuesta o traspuesta de A, A^t, a la matriz de orden nxm cuyos elementos son los de A intercambiando filas por columnas: $a^t_{ij} = a_{ji}$. Una matriz A es simetrica si $A^t = A$ y es antisimetrica si $A^t = -A$.

Pongamos un ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 9 \\ -8 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 6 & 9 & -5 \end{bmatrix}$

8.2.5.*Matrices iguales:* Dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{p\times q}$ son iguales, sí y solo sí, tienen el mismo orden y en las mismas posiciones, elementos iguales, es decir :

$$m=p,\ n=q;\ \text{y}\ a_{ij} = b_{ij}\ \ \forall i,\ \forall j$$

8.3. Suma de matrices:

Si $A = (a_{ij})_{mxn}$ y $B = (b_{ij})_{mxn}$ entonces su suma es $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{mxn}$.

La suma de dos matrices de igual orden o dimensión se obtiene una nueva matriz cuyos elementos se calculan como la **suma** de los elementos de la misma fila y columna de las dos matrices, que actúan como sumandos.

Propiedades de la suma de matrices:

1).	**Propiedad**	**Expresión simbólica y significado**
2)	**Conmutativa**	$A + B = B + A$
3)	**Asociativa**	$A + (B + C) = (A + B) + C$
4)	**Elemento neutro**	$A + O = O + A = A$
5)	**Elemento simétrico**	$A + (-A) = (-A) + A = O$

Siendo: ***O* matriz nula**, es la matriz que tiene todos sus elementos iguales a cero.
(- *A*) es la matriz opuesta de la matriz A.

8.4. Producto y potencias de matrices

En el **álgebra de matrices**, se definen:

- Si $kA = k(a_{ij})_{mn}$, debes multiplicar cada elemento de la matriz por el escalar que es un número constante.

  Ejemplo:

$$2A = 2\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 10\\ 6 & 8\end{bmatrix}$$

Propiedades: $\forall \varphi, \varpi, 1 \in R\ ,\ \forall A \in M_{m\times n}$ se tiene que

1) $\varphi(\varpi A) = (\varphi\varpi)A$

2) Distributiva I: $\varphi(A+B) = \varphi A + \varphi B$

3) Distributiva II: $(\varphi + \varpi)A = \varphi A + \varpi B$

4) Elemento neutro de escalares: $1 \times A = A$

8. 5. El **producto de dos matrices** sólo es posible cuando tienen los órdenes «encadenados »; es decir, una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m\ x\ n$ sólo puede multiplicarse por otra $B = (b_{ij})$ si la dimensión de ésta es $n\ x\ p$, de manera que la matriz producto resultante tiene un orden igual a $m\ x\ p$. Esto quiere decir, que sólo pueden multiplicarse dos matrices que tienen el número de columnas de la primera matriz igual al número de filas de la segunda matriz. La matriz resultante $C = (c_{ij})$ se calcula de forma que cada uno de sus términos c_{ij} es igual a la suma ordenada de los productos de los elementos de la fila i de A por los de la columna j de B: primer elemento de la fija i de A por primer elemento de la columna j de B; más el segundo de la fila i por el segundo de la columna j, etc.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11\\ 12 & 13 & 14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0+9+24 & 0+10+26 & 0+11+28\\ 18+36+60 & 21+40+65 & 24+44+70\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}33 & 36 & 39\\ 114 & 126 & 138\end{bmatrix}$$

Como ampliación del concepto de producto, puede definirse la **potencia enésima de una matriz** como el producto de ésta por sí misma n veces. Para que una matriz pueda multiplicarse por sí misma tiene que ser cuadrada. Es decir:

$$A^n = \underbrace{A.A.A..........A}_{n\ veces}$$

8.6. Determinantes y matrices

El **determinante** de una matriz cuadrada A, es el valor de la suma de determinados productos que se realizan con los elementos que componen la matriz.
Se denota por el símbolo $|A|$ o $det\ (A)$.

Determinantes de orden 2

Sea: $A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \rightarrow det(A) = |A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}\ .\ a_{21}$

Regla de Sarrus

Para calcular el determinante de una matriz de orden 3, se recurre al uso de la llamada **regla de Sarrus**. Este determinante se obtiene de la suma de seis términos:

Tres positivos, formados por los siguientes productos de tres factores: los tres elementos de la diagonal principal y los elementos de las dos líneas paralelas a esta diagonal, multiplicados por el vértice opuesto.
Otros tres negativos, también constituidos por productos de tres factores: los tres elementos de la diagonal secundaria y los de las líneas paralelas a ella, multiplicados por el vértice opuesto.
Es decir, dada una matriz A:

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Entonces el desarrollo de su determinante, según la regla de Sarrus, vendría dado por:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

8.7. Menores complementarios

Dada una matriz cuadrada de orden n, se denomina **menor complementario** a cada una de las matrices de orden $(n - 1)$ que se obtienen al suprimir la fila y la columna donde se encuentra un elemento (a_{ij}) de la matriz original.
Por ejemplo, para la matriz cuadrada de orden 3

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

pueden definirse, entre otros, los dos siguientes menores complementarios:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \quad \text{y} \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 0 = 9.$$

8.8. Adjunto y matriz adjunta

Para una matriz cuadrada A de orden n se llama **adjunto** A_{ij} del elemento a_{ij} al determinante del menor complementario de dicho elemento multiplicado por (-1) elevado a i más j. Es decir:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

Dada una matriz cuadrada A, se define su **matriz adjunta**, que se denota $Adj(A)$, como aquella en la que los elementos de A están reemplazados por sus adjuntos respectivos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

8.9. Desarrollo de un determinante

El valor de un determinante puede obtenerse a partir de los adjuntos de los elementos de su matriz correspondiente. Así:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

En este caso, el determinante se ha desarrollado por la primera fila. En general, un determinante puede desarrollarse **por filas** o **por columnas**.

En el manejo de **determinantes** se pueden establecer algunas propiedades que facilitan las operaciones de cálculo. Tales propiedades son:

- 1. Una **matriz cuadrada** con una **fila** o una **columna** en la que todos los elementos son nulos tiene un determinante igual a cero.
- 2. El determinante de una matriz con dos filas o dos columnas iguales es cero.
- 3. Cuando dos filas o dos columnas de una matriz son proporcionales entre sí (una se puede obtener multiplicando la otra por un factor), su determinante es cero.
- 4. Al intercambiar dos filas o dos columnas de una matriz, su determinante cambia de signo.
- 5. Al multiplicar todos los elementos de una fila o una columna de una matriz por un número, el determinante de la matriz resultante es igual al de la original multiplicado por ese mismo número.
- 6. El determinante de una **matriz triangular** o una **matriz diagonal** es igual al producto de los elementos de su **diagonal principal**.
- 7. Cuando a una fila (o columna) de una matriz se le suma o resta una **combinación lineal** de otras filas (o columnas), el valor de su determinante no se altera.

Matriz Inversa (A^{-1})

Para la matriz cuadrada A de orden n, se dice que existe una **matriz inversa** A^{-1} también cuadrada de orden n, cuando el producto de ambas es igual a la matriz identidad: $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$.

Toda matriz que tiene inversa se dice **inversible** o no singular, mientras que cuando carece de inversa se denomina **matriz singular**.

Teorema. Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Si el determinante de A no es cero, entonces la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Encontrar A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Primero: encuentro el determinante de A: $|A| = (3)(4) - (5)(1) = (12) - (5) = 7$

Segundo: calculo la $adj\ A$:

Cofactores de A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = 4 \qquad A_{12} = -1$

$A_{21} = -5 \qquad A_{22} = 3$

Tercero: con las respuestas formo la matriz B y luego obtengo B^T que es la $adjA$.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = adjA$$

Cuarto: aplico el teorema

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Comprobamos la respuesta:

$$AA^{-1} = I_2 = A^{-1}A$$

Regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales se dice de Cramer cuando cumple las siguientes condiciones:

- Es un sistema cuadrado, con igual número de ecuaciones que de incógnitas.
- El determinante de la matriz de los coeficientes asociada es distinto de cero.

En consecuencia, un **sistema de Cramer** es siempre compatible determinado (tiene una solución única).

Para calcular la incógnita x_i del sistema de ecuaciones lineales, se sustituye la columna i de la **matriz de coeficientes** por los **términos independientes**, se obtiene el determinante de la matriz resultante y se divide este valor por el del determinante de la matriz de los coeficientes. Por tanto, la solución de un sistema de Cramer se obtiene hallando cada incógnita x_i según la fórmula:

$$x_i = \frac{|C_i|}{|C|}$$

Siendo C_i la matriz resultante de sustituir la columna de la matriz de los coeficientes correspondiente a la incógnita por la de los términos independientes.

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x + 2y + 2z &= 0 \\ 2x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hallamos los determinantes de:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 2; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -2; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 1;$$

Luego la solución del sistema es $x = 2;\ y = -2$ y $z = 1$

Resolución de un sistema por eliminación gaussiana

El procedimiento más utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices es el llamado **método de eliminación gaussiana**, que consta de los siguientes pasos:

- Se forma la matriz ampliada del sistema incorporando a la de los coeficientes, por la derecha, una nueva columna con los elementos de la matriz de los términos independientes.
- Se aplican operaciones elementales sobre las filas de esta matriz ampliada, hasta lograr que por debajo de la diagonal principal de la matriz todos los términos sean nulos.
- Se obtiene entonces un sistema equivalente de ecuaciones de resolución inmediata.

Este método permite también realizar una rápida discusión del sistema.
Si la última fila de la matriz resultante de la transformación de la ampliada produce una ecuación del tipo $0x + 0y + cz = k$, con $c \neq 0$, el sistema es **compatible determinado** (tiene una solución única).

Cuando esta última fila corresponde a una ecuación del tipo $0x + 0y + 0z = k$, $k \neq 0$ el sistema es **incompatible** (carece de solución).
Si esta última fila se traduce en una ecuación del tipo $0x + 0y + 0z = 0$, el sistema será **compatible indeterminado** (con infinitas soluciones).

Ejemplo: Sea el sistema: $\left.\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 4 \\ x + y + z &= 2 \\ -x + 4y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$

Matriz amplificada:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

A la fila f_3 se le suma la fila f_2 y a esta segunda multiplicada por 2, se le resta la primera:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Luego, a $f_3 \times 3$ se le resta $f_2 \times 5$:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 15 \end{array}\right]$$

Finalmente: $6z = 15 \rightarrow z = 5/2 \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad x = -½$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Determine "*a* + *b*" si: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$

   A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

2. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 2 & 5 & a \\ b & x & 3 \end{bmatrix}$; Es una matriz simétrica. Calcular los valores de *a*, *b* y *x*

   dar como respuesta: $a^b + x$

   A) 4 B) 2 C) 6 D) 0 E) N.A.

3. Sean las matrices. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 2 & b \\ b & c \end{bmatrix}$; si se cumple que: $A+B=I$

donde $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Hallar *a* + *b* + 2*c*

A) 1/2 B) –1/2 C) 3/2 D) 0 E) N.A.

4. Resolver: $\begin{vmatrix} x+1 & 2(x+1) \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & x+2 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}$

A) 4/3 B) 3/4 C) 5 D) 6 E) N.A.

5. Resolver: $\begin{vmatrix} 6x+1 & 4y-1 \\ 3x-1 & 2y-1 \end{vmatrix}=0 \quad \wedge$

$\begin{vmatrix} 8x-1 & 4y-1 \\ 4x+1 & 2y+1 \end{vmatrix}=0$

Dar como respuestaa *x* + *y*

A) 2/3 B) 3/2 C) 5/2 D) 2/5 E) N.A.

6. Calcular el valor de: $F=\dfrac{y}{z+x}$ sabiendo que: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=0$

A) 0,2 B) 0,3 C) 0,4 D) 0,5 E) N.A

7. Resolver: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ x & 8 & 2 \\ 4 & -7 & 5 \end{vmatrix}=-128$

A) 100 B) -50 C) 2 D) -2 E) N.A.

8. Sea $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$; calcular $E=A+2A+3A+4A+\cdots+nA$

A) $\begin{bmatrix} -(n)(n+1) & 0 \\ 2n(n+1) & -n(n+1) \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 0 & n \\ n+1 & n+2 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} n(n+1) & 0 \\ n(n+1) & -n(n+1) \end{bmatrix}$ E) N.A.

9. Si *A* y *B* son matrices involutivas y $BA=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ Hallar la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz: $C=(A+B)^2$

A) 4 B) 2 C) 5 D) 6 E) N.A.

10. Calcular la traza de "x" en la ecuación: *Ax* = *AB* – *Bx*, donde:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

A) 24 B) -24 C) 25 D) -2T E) N.A.

11. Sea: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, calcular la traza de *B* si: *AB* es la matriz identidad.

A) 2/3 B) 3 C) 2 D) – 2/3 E) –3

12. Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 2 & b \\ b & c \end{bmatrix}$

Si se cumplen que *A* + *B* = *I*, donde

$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar *a* + *b* + 2*c*

A) -1 B) -1/2 C) 0 D) 1/2 E) 1

13. Sean: $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{cases} \mathrm{x}+2\mathrm{y}=\mathrm{A} \\ \mathrm{x}-\mathrm{y}=\mathrm{B} \end{cases}$ Donde *x* e *y* son matrices de orden 2, entonces *x* es:

A) $\begin{bmatrix} 4/3 & 7/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3/2 & 5/2 \\ 2 & -1/2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & -9/2 \\ 4/3 & -7 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 9/4 & 7/2 \\ 3/4 & 1 \end{bmatrix}$

14. Sean las matrices:

$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \mathrm{x}-3\mathrm{y} & \mathrm{x} \\ 1 & \mathrm{y} \end{bmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 2 & 6-\mathrm{y} \\ 1 & 6-\mathrm{x} \end{bmatrix}$ $\mathrm{C}=\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Si $A = B$; Hallar: $3A + 2C$

A) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

15. Calcular $a + b - c$ si:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 21 \\ 15 & 14 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-21 & a \\ b & a-10 \\ c-15 & c \end{pmatrix}$$

A) 26 B) 28 C) 42 D) 54 E) -26

16. Sea la matriz: $H = \begin{bmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ talque: det(H) = 4 ; luego H^2 es:

A) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

17. Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{bmatrix}$; $n \in IN$

A) 1 B) -1 C) n D) -n E) Absurdo

18. Simplificar: $T = \dfrac{\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}}$

A) 10 B) 20 C) 30 D) 5 E) 0

19. Resolver: : $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = 0$

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) 3

20. Si $x \in R^2$ es solución del sistema: $Ax = b$.
Calcular Traz ($x^t B$), Donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 1/2

21. Sean a, b, c números reales positivos.
Entonces el valor de x tal que:

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = 0, \text{ es :}$$

A) $\dfrac{abc}{ab+ac+bc}$ B) $-\dfrac{abc}{ab+ac+bc}$ C) $-\dfrac{abc}{a+b+c}$

D) $\dfrac{abc}{a+b+c}$ E) abc

22. Sean las matrices A y B tales que $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} u & v & w \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$

Encontrar u + v + w + x + y + z si se cumple que AB = I (I es la matriz identidad)

A) 21 B) 20 C) 18 D) 15 E) 7

23. Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, entonces el valor de la M^{1003} es:

A) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ C) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ E) $\alpha^{1003}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

24. Definamos la matriz $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2^n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Entonces la matriz:

$B = A_1 A_2 A_3 \ldots A_n A_{n+1} \ldots$ es: (Atención: nótese que n crece indefinidamente)

A) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}1&1/2\\0&1\end{pmatrix}$

25. Sean A y B dos matrices definidas por: $A=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}0&2\\-1&1\end{bmatrix}$;

$$E=\frac{|A-B|-|2B|}{|A+B|^{-1}}$$

entonces el valor de:

A. 10 B. 15 C. 20 D. 25 E. 60

26. Si A es una matriz antisimétrica definida así: $A=\begin{bmatrix}a-b&d&c\\a&b+1&-4\\e&4&c-2\end{bmatrix}$

Determinar el valor de: T = a + b + c+ d + e

A. -1 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

27. Hallar la traza de la siguiente matriz simétrica:

$$A=\begin{bmatrix}x&x+2y&10\\5&2y&3z+x\\2y+3z&7&3z\end{bmatrix}$$

A. 10 B. 8 C. 11 D. 6 E. 0

28. Calcular la matriz inversa de:

$$P=\begin{bmatrix}1&-1&-3\\2&-2&1\\-1&3&-1\end{bmatrix}$$

Señala el elemento a_{33} de la matriz inversa:

A. 2/7 B. 5/7 C. 1/7 D. 0 E. ½

29. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\\0&1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}4&8&1\\2&-1&3\end{bmatrix}$, hallar la tras(A.B)

A. 0 B. 1 C. -1 D. 2 E. -2

30. Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix}x-1&0&x+3\\1&x-2&4\\1&-1&2\end{vmatrix}=1-7x$ y señalar uno de los valores de x.

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. 9

31. Sea la ecuación matricial: 2A = AX + B

Donde: $A=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}-1&2\\-3&1\end{bmatrix}$, Hallar la traza de la matriz *X*.

A. 1 B. 0 C. 2 D. 3 E. 4

32. Sean $A=\begin{bmatrix}2&4&1\\1&-2&3\\5&0&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&-1&-2\\0&5&6\\0&0&9\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&-1&2\\1&-2&5\end{bmatrix}$

Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas (V) y cuáles son falsas (F)

I. Las tres matrices rectangulares son de orden 3.
II. El elemento 2,2 de – A – B + C es: - 4
III. El elemento 3,2 de 3A + C/2 es: - 1

A. VVF B. FFV C. FVV D. VVV E. FFF

33. 10. Si: $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ se cumple:

I. $A^2=A^{70}$
II. $A^4\neq A^8$
III. $A^3=A^2+A$

A. VFF B. VVF C. VFV D. FFV E. FVV

34. Sabiendo que: $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&a+b\\c+d&3\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}a&6\\-1&2d\end{bmatrix}$